

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»**

На правах рукописи

Гарбарук Андрей Викторович

**Численное моделирование и анализ устойчивости
пристеночных турбулентных течений**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



Научный консультант
Стрелец Михаил Хаимович

Санкт-Петербург - 2020

Оглавление

| | |
|---|----|
| Введение..... | 6 |
| Глава 1. Аналитический обзор методов численного моделирования пристеночных турбулентных течений..... | 23 |
| 1.1. Полуэмпирические модели турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса | 23 |
| 1.2. Гибридные RANS-LES методы..... | 38 |
| 1.2.1. DES-подобные модели..... | 38 |
| 1.2.2. Зонные RANS-LES модели | 49 |
| Глава 2. Усовершенствование полуэмпирических моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса | 56 |
| 2.1. Формулировка разработанных моделей | 56 |
| 2.1.1. Явная алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений BSL EARSM..... | 56 |
| 2.1.2. Нелинейная модель SST NL..... | 58 |
| 2.1.3. Модель SST RC1 для расчета течений с существенной кривизной линии тока или вращением потока..... | 59 |
| 2.1.4. Модель SST HL для расчета обтекания аэродинамических профилей при условиях близких к срыву потока..... | 64 |
| 2.1.5. Модель SA TC для расчета осесимметричных течений..... | 65 |
| 2.1.6. Модель SA Low-Re для расчета пограничных слоев при низких числах Рейнольдса..... | 66 |
| 2.2. Метод решения определяющих уравнений | 66 |
| 2.3. Тестирование разработанных RANS моделей..... | 71 |
| 2.3.1. Тестирование моделей BSL EARSM и SST NL | 71 |
| 2.3.1.1. Развитое турбулентное течение в канале квадратного сечения | 71 |
| 2.3.1.2. Течение в асимметричном прямоугольном диффузоре | 73 |
| 2.3.1.3. Сверхзвуковое течение на начальном участке квадратного канала | 77 |
| 2.3.1.4. Развитое течение в сборке тепловыделяющих элементов | 80 |
| 2.3.1.5. Трансзвуковое обтекание модели самолета DLR F-6..... | 84 |
| 2.3.2. Тестирование модели SST RC1 | 86 |

| | |
|--|-----|
| 2.3.2.1. Течение в плоском вращающемся канале | 86 |
| 2.3.2.2. Течение в плоском канале с поворотом на 180° | 87 |
| 2.3.2.3. Изолированный автомодельный вихрь | 88 |
| 2.3.2.4. Концевой вихрь крыла конечного размаха..... | 90 |
| 2.3.2.5. Обтекание системы механических вихрегенераторов в сверхзвуковом пограничном слое | 92 |
| 2.3.3. Тестирование модели SST HL | 93 |
| 2.3.4. Тестирование модели SA TC | 98 |
| 2.3.4.1. Затопленная осесимметричная струя..... | 98 |
| 2.3.4.2. Развитое течение в круглой трубе | 100 |
| 2.3.5. Тестирование модели SA Low-Re | 100 |
| Глава 3. Формулировка и тестирование гибридных RANS-LES подходов..... | 102 |
| 3.1. Формулировка разработанных моделей | 102 |
| 3.1.1. Адаптация методов DDES и IDDES к базовой SST модели | 102 |
| 3.1.2. Ускорение перехода к развитой трехмерной турбулентности в слоях смещения в рамках DDES на основе модели SST | 106 |
| 3.1.3. Технология применения зонных RANS-LES подходов с использованием объемного источника турбулентных пульсаций | 110 |
| 3.2. Метод решения определяющих уравнений | 112 |
| 3.3. Тестирование предложенных гибридных методов | 115 |
| 3.3.1. Тестирование метода SST IDDES..... | 116 |
| 3.3.2. Тестирование методов ускорения перехода к развитой турбулентности в рамках SST DDES | 118 |
| 3.3.2.1. Течение в канале с внезапным расширением..... | 118 |
| 3.3.2.2. Обтекание двумерной выпуклости на плоской поверхности | 121 |
| 3.3.2.3. Сверхзвуковое продольное обтекание цилиндра с донным срезом..... | 125 |
| 3.3.3. Тестирование технологии применения зонных RANS-LES подходов | 129 |
| Глава 4. Применение гибридных RANS-LES подходов для численного моделирования сложных течений..... | 133 |

| | |
|--|-----|
| 4.1. Поперечное обтекание тандема цилиндров..... | 133 |
| 4.2. Обтекание трехэлементного профиля DLR-F15. | 142 |
| 4.3. Расчет акустических характеристик при обтекании модельной конфигурации крыло - закрылок..... | 146 |
| 4.4. Расчет нестационарных аэродинамических нагрузок на элементы пилотируемых космических кораблей | 151 |
| 4.4.1 Трансзвуковое обтекание возвращаемого аппарата | 151 |
| 4.4.2. Обтекание космической головной части на участке выведения | 157 |
| 4.4.3. Обтекание пилотируемого космического корабля при аварийном отделении ОГБ..... | 178 |
| 4.5. Трансзвуковое обтекание выпуклости на цилиндрической поверхности | 191 |
| Глава 5. Линейный анализ глобальной устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса | 200 |
| 5.1. Вывод уравнений анализа глобальной устойчивости трехмерных и двумерных сжимаемых турбулентных течений..... | 203 |
| 5.1.1. Линеаризация основных уравнений..... | 204 |
| 5.1.2. Линеаризация уравнения переноса турбулентной вязкости..... | 211 |
| 5.1.3. Квазитрехмерная версия метода..... | 214 |
| 5.2. Метод решения | 221 |
| 5.2.1. Дискретизация уравнений..... | 221 |
| 5.2.2. Решение задачи на собственные значения | 222 |
| 5.3. Верификация, валидация и применение разработанных методов и программного обеспечения | 223 |
| 5.3.1. Верификация методов на примере анализа устойчивости ламинарных течений..... | 224 |
| 5.3.1.1. Неустойчивость Толлмина-Шлихтинга в плоском канале | 224 |
| 5.3.1.2. Неустойчивость обтекания прямоугольной каверны на плоской поверхности..... | 225 |
| 5.3.1.3. Неустойчивость ламинарного слоя Экмана | 227 |
| 5.3.1.4. Неустойчивость следа круглого цилиндра постоянного диаметра..... | 231 |

| | |
|---|-----|
| 5.3.1.5. Неустойчивость следа трехмерного цилиндра переменного диаметра | 234 |
| 5.3.2. Верификация и валидация разработанных методов применительно к анализу устойчивости стационарных решений RANS | 236 |
| 5.3.2.1. Неустойчивость одномерного турбулентного течения Куэтта | 237 |
| 5.3.2.2. Неустойчивость турбулентного слоя Экмана | 239 |
| 5.3.2.3. Возникновение вихревых ячеек при обтекании прямого крыла бесконечного размаха..... | 242 |
| 5.3.3. Применение разработанных методов для определения параметров начала трансзвукового бафтинга крыла..... | 244 |
| 5.3.3.1. Обтекание прямого крыла бесконечного размаха | 244 |
| 5.3.3.2. Обтекание стреловидного крыла бесконечного размаха | 252 |
| Заключение | 259 |
| Список литературы | 261 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Согласно общепринятой в настоящее время точке зрения, турбулентные течения вязких ньютоновских жидкостей и газов строго описываются классическими уравнениями Навье-Стокса, сформулированными в первой половине XIX века [1] - [4]. Однако, несмотря на появление и неуклонный рост возможностей вычислительной техники, наблюдаемый со второй половины XX века, они по-прежнему остаются далеко недостаточными для численного интегрирования этих уравнений при представляющих практический интерес высоких числах Рейнольдса. Более того, даже по оптимистичным оценкам, данная ситуация сохранится по крайней мере вплоть до конца XXI века [5]. Поэтому основной теоретической базой для расчета турбулентных течений, как и на протяжении многих предшествующих лет, остаются так называемые модели турбулентности того или иного уровня адекватности и вычислительной сложности. В связи с исключительной практической важностью надежного расчетного предсказания характеристик сложных турбулентных течений для многих областей науки и техники (большинство представляющих интерес течений являются турбулентными), построению таких моделей, разработке методов расчета и проведению численных исследований различных течений на их основе посвящено огромное число работ. В результате в этой области в последние десятилетия достигнуты значительные успехи. Прежде всего, они состоят в усовершенствовании уже существующих моделей турбулентности и в создании новых более сложных моделей, возможность реализации которых обеспечивается ростом производительности вычислительной техники, что, в свою очередь, требует проведения новых исследований, направленных на определение границ применимости вновь создаваемых моделей. Таким образом, “окончательное” решение данной проблемы является, в принципе, недостижимым (модель любого уровня сложности не может претендовать на адекватное описание всех свойств реальных турбулентных потоков), и проблема расчета турбулентных течений еще долгое время будет оставаться актуальной и важной проблемой теоретической и вычислительной механики жидкости и газа.

Данная диссертация суммирует основные результаты исследований автора, полученные им в процессе работы над этой проблемой в период с начала двухтысячных годов до настоящего времени. Для понимания логики этих исследований и их роли и места в общем потоке работ, направленных на ее решение, необходимо кратко остановиться на анализе основных тенденций в моделировании турбулентности, наблюдавшихся в этот период.

Существующие подходы к описанию турбулентности можно разделить на два широких класса (Рис. 1), различающихся соотношением долей моделируемых и разрешаемых пространственно-временных масштабов турбулентных вихревых структур в энергетическом спектре турбулентности, представляющем собой зависимость спектральной плотности кинетической энергии турбулентности E от волнового числа k (Рис. 2).



Рис. 1. Существующие подходы к описанию турбулентности.

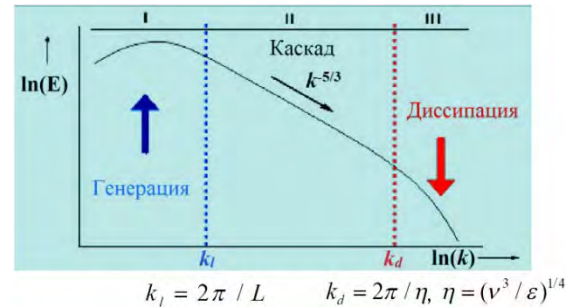


Рис. 2. Различные области энергетического спектра турбулентности при высоких значениях числа Рейнольдса.

К первому из них относятся подходы, базирующиеся на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations* – *RANS*) [6], в рамках которых все вихревые структуры в турбулентном потоке моделируются с использованием статистических полуэмпирических моделей турбулентности. Ко второму классу относятся так называемые вихреразрешающие подходы, в которых часть масштабов разрешается “точно”, а часть приближенно моделируется.

Наиболее строгим из них является прямое численное моделирование (*Direct Numerical Simulation* – *DNS*). Под этим понимается численное интегрирование трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на сетках, обеспечивающих разрешение всех вихревых структур потока с размерами вплоть до колмогоровского масштаба $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ (ν – кинематическая вязкость, ϵ – скорость вязкой диссипации кинетической энергии турбулентности). Таким образом, метод DNS базируется на первых принципах аэродинамики и свободен от эмпиризма.

Вторым по строгости описания турбулентности вихреразрешающим подходом является так называемый метод моделирования крупных вихрей (*Large-Eddy Simulation* – *LES*), впервые предложенный в работе Смагоринского [7]. В рамках этого метода решаются не исходные, а предварительно отфильтрованные по пространству уравнения Навье-Стокса. В результате, с помощью LES точно разрешаются только основные “энергонесущие” или “крупные” вихри, размеры которых зависят от размера фильтра (его роль обычно играет используемая вычислительная сетка), а более мелкие вихревые структуры приближенно моделируются с использованием полуэмпири-

ческих (так называемых подсеточных - *Sub Grid Scale* или *SGS*) моделей. При этом подразумевается, что размеры разрешаемых структур соответствуют инерционному интервалу энергетического спектра (область II на Рис. 2). В результате требования к пространственно-временному разрешению в LES оказываются значительно более мягкими, чем в DNS.

Наконец, третий сравнительно новый класс вихреразрешающих подходов, гибридные RANS-LES методы (*Hybrid RANS-LES Methods - HRLM*), включает большую группу методов, в рамках которых используется та или иная комбинация методов RANS и LES.

Основные факторы, определяющие общий “вектор” развития методов моделирования турбулентности начиная с конца прошлого века, иллюстрирует Рис. 3. В первую очередь они связаны с достоинствами и недо-



Рис. 3. Тенденции развития методов расчета турбулентных течений.

статками описанных выше подходов, а именно с ограниченностью возможностей методов RANS, с принципиальными преимуществами вихреразрешающих подходов перед RANS моделями с точки зрения универсальности, точности и информативности. Важную роль также играют рост производительности компьютеров и развитие численных алгоритмов и параллельных вычислительных технологий, что позволяет проводить все более громоздкие расчеты.

Модели RANS развиваются уже на протяжении почти 100 лет (начиная с классической модели пути смешения Прандтля, опубликованной в 1925 г. [8]) и вплоть до настоящего времени занимают доминирующее положение при решении прикладных задач о расчете турбулентных течений. Основными достоинствами этих моделей являются простота их реализации и экономичность, а также наличие хорошо отработанных вычислительных технологий для выполнения расчетов с их использованием, что открывает возможность проведения серийных расчетов, необходимых для создания и оптимизации новых конструкций и технологий. При этом лучшие из известных RANS моделей обеспечивают приемлемую для инженерных приложений точность расчета многих турбулентных течений. Однако, наряду с этими достоинствами, модели RANS имеют некоторые принципиальные недостатки. В частности, они непригодны для многих важных междисциплинарных приложений, таких как задачи аэроакустики и аэроупругости, для решения которых необходима информация не только об осредненных, но и о пульсационных характеристиках турбулентности. Кроме того, модели RANS не являются универсальными (т.е. обеспечивают надежное предсказание осредненных характеристик лишь для ограниченного круга относительно простых течений). Это связано с тем, что, наряду с мелкими хаотичными (“универсальными”) вихрями, в реальных турбулентных потоках обычно присутствуют крупные,

относительно устойчивые (когерентные) вихревые структуры, определяемые специфическими для каждого течения глобальными свойствами (геометрией и граничными условиями). Возможность описания этих структур в рамках единой модели, настроенной на учет мелкомасштабной турбулентности в тонких сдвиговых слоях, представляется крайне сомнительной. Кроме того, все без исключения модели RANS базируются на гипотезе локальности, согласно которой напряжения Рейнольдса τ_{ij} в данной точке потока зависят от осредненных параметров течения только в этой точке [9], что также не позволяет в полной мере учесть глобальные эффекты, характерные для сложных (в первую очередь, отрывных) турбулентных течений.¹ Два наглядных примера, иллюстрирующих неудовлетворительную работу RANS моделей турбулентности даже при расчете геометрически несложных турбулентных течений такого типа представлены на Рис. 4 и Рис. 5.² Из них ясно видно, что ни одна из испытанных моделей не обеспечивает приемлемой точности предсказания основных характеристик рассматриваемых течений.

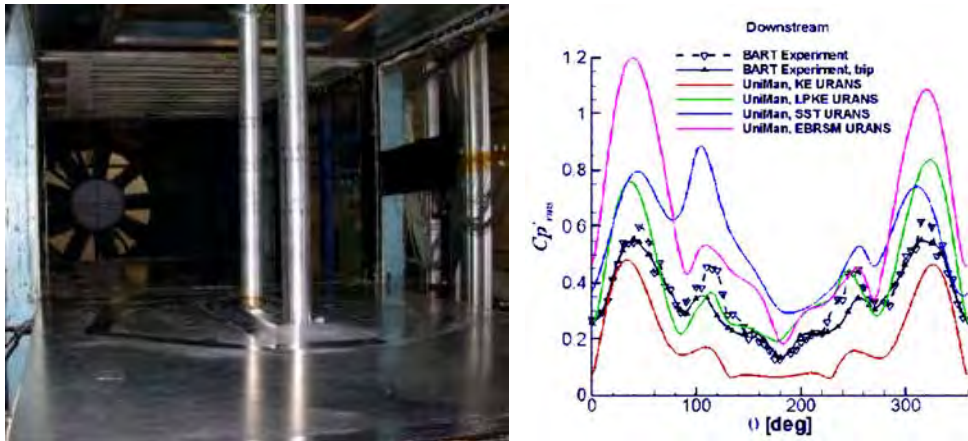


Рис. 4. Схема обтекания тандема цилиндров (из [10]) и результаты нестационарных RANS расчетов с использованием различных моделей турбулентности (из [11]).

Принимая во внимание невозможность создания универсальной RANS модели турбулентности (в конце прошлого века данная точка зрения стала общепринятой [5], [12], [13]), основные исследования, посвященные развитию RANS моделей в рассматриваемый период, велись в двух направлениях. Первое из них состоит в повышении точности предсказания такими моделями характеристик тех или иных конкретных типов течений путем введения поправок, учитывающих

¹ Следует отметить, что в классической статье Рейнольдса 1895 г. [6], в которой сформулированы уравнения RANS, нет никаких указаний на существование такой локальной связи.

² Представленные на этих рисунках данные заимствованы из финального отчета по проекту ЕС АТААС [11], участниками которого было выполнено детальное исследование возможностей широкого круга RANS моделей турбулентности применительно к таким течениям.

их специфические физические особенности, а второе – в повышении вычислительной устойчивости моделей реинольдсовых напряжений (*Reynolds Stress Models – RSM*), являющихся наиболее общими моделями данной группы. Актуальность и важность этих исследований обусловлены тем, что RANS модели еще долгое время будут служить основным инструментом для расчета сложных турбулентных течений, острую нужду в которых испытывают многие отрасли науки и техники. Кроме того, эти модели являются важной составляющей HRLM, которые находят все большее практическое применение в связи с ростом производительности компьютеров и в перспективе постепенно займут место RANS (см. далее).

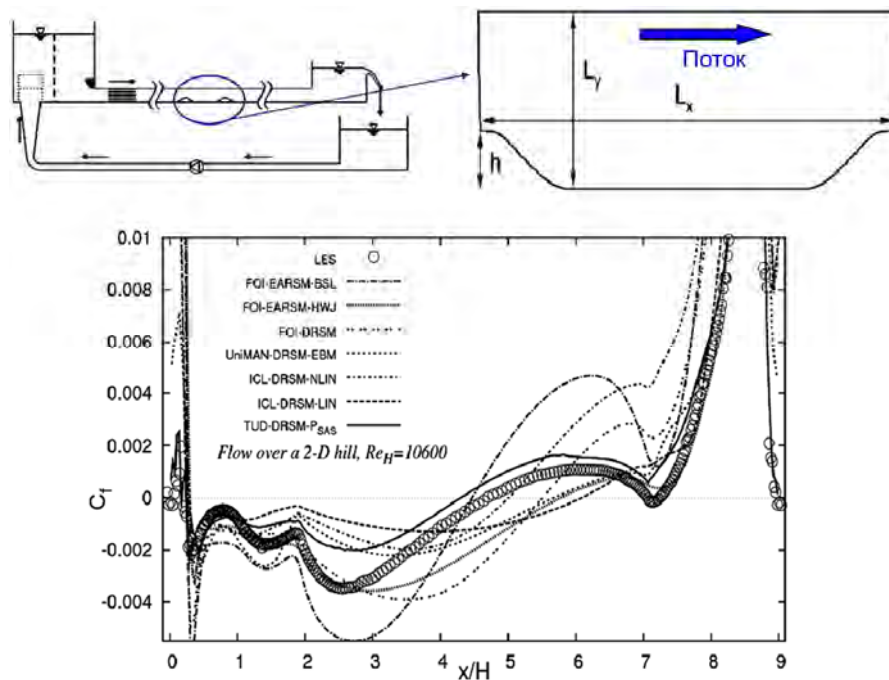


Рис. 5. Схема обтекания периодической решетки холмов (из [14]) и результаты RANS расчетов с использованием различных моделей турбулентности (из [11]).

Что касается классических вихреразрешающих подходов к расчету турбулентных течений DNS и LES, то, как уже отмечалось, с их помощью могут быть достаточно точно рассчитаны любые турбулентные течения, причем, в отличие от RANS, это относится не только к их осредненным характеристикам, но и к нестационарной вихревой структуре потока. Однако в начале XXI века практическое применение этих подходов было крайне ограниченным.

Так, DNS в основном использовался в академических исследованиях, посвященных детальному изучению канонических турбулентных течений при невысоких (порядка $10^3 - 10^4$) числах Рейнольдса и выявлению основных закономерностей, присущих турбулентности. Это объясняется тем, что отношение макроскопического линейного масштаба течения L (характерный размер обтекаемого тела) к минимальному масштабу турбулентных структур в спектре турбулентности (колмогоровский линейный масштаб η_k) пропорционально числу Рейнольдса в степени $3/4$:

$L/\eta_k \sim \text{Re}^{3/4}$. В результате, размер трехмерной пространственной вычислительной сетки, необходимой для DNS, растет с увеличением числа Рейнольдса как $(L/\eta_k)^3$ или как $\text{Re}^{9/4}$. Кроме того, с его ростом увеличивается также и отношение интегрального временного масштаба $\tau_I = L/U_\infty$ к минимальному (соответствующему колмогоровским вихрям) временному масштабу $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$, которое определяет число шагов по времени, необходимое для проведения расчета: $\tau_I/\tau_\eta \sim \text{Re}^{1/2}$. Таким образом, суммарные вычислительные затраты на проведение DNS растут с ростом числа Рейнольдса как $\text{Re}^{11/4}$ и оказываются огромными при его значениях, представляющих практический интерес (порядка 10^6 и выше). Например, для расчета с помощью DNS обтекания гражданского самолета ($\text{Re}_L = O(10^9)$) на компьютере с производительностью 1 эксафлоп потребовалось бы около 5 лет. Единственная возможность уменьшения вычислительных ресурсов, необходимых для DNS, состоит в повышении эффективности используемых для этого численных методов путем создания низкодиссипативных высокоустойчивых алгоритмов для численного интегрирования уравнений Навье-Стокса и их адаптации к современным многопроцессорным вычислительным системам. За последние два десятилетия на этом пути достигнуты значительные успехи, что сделало возможным применение DNS для расчетов некоторых достаточно сложных течений (см., например, работы [15] - [17]), результаты которых, наряду с экспериментальными данными, составляют основу для усовершенствования, калибровки и тестирования RANS моделей турбулентности.

Как уже отмечалось, в отличие от DNS, LES базируется на решении не исходных, а отфильтрованных по пространству уравнений Навье-Стокса. Как и в случае уравнений Рейнольдса, для их замыкания, то есть для установления связи между дополнительными (появляющимися в результате применения процедуры фильтрации) членами уравнений³ и параметрами отфильтрованного течения, используются приближенные (полуэмпирические) модели. Таким образом, по своей форме уравнения LES аналогичны уравнениям RANS, однако это сходство является чисто внешним, поскольку в рамках RANS моделируются все турбулентные вихревые структуры, а в рамках LES - только те из них, размеры которых превышают размер фильтра Δ (на практике таким размером служит шаг используемой вычислительной сетки). Если волновое число k_Δ , соответствующее размеру фильтра, лежит в универсальной (“инерционной”) области энергетического спектра турбулентности ($k_l < k_\Delta < k_d$ - см. Рис. 6), то моделированию подлежат

³ В отличие от уравнений Рейнольдса, в которых аналогичные слагаемые называются Рейнольдсовыми напряжениями, эти члены принято называть подсеточными напряжениями.

относительно универсальные (не зависящие от конкретной геометрии и граничных условий) вихри.

В результате, роль подсеточной модели в LES оказывается гораздо менее значимой, чем роль модели турбулентности в RANS, и состоит, главным образом, в обеспечении правильной скорости диссипации “точно”

разрешенных в процессе численного интегрирования уравнений LES крупных вихрей. Данное обстоятельство определяет принципиальное преимущество метода LES перед RANS моделями, в рамках которых необходимо моделирование всех, в том числе крупных энергосодержащих вихрей, не подчиняющихся каким-либо универсальным законам. Отметим также, что при измельчении расчетной сетки дополнительные по сравнению с уравнениями Навье-Стокса слагаемые (подсеточные напряжения) в уравнениях LES уменьшаются, и решение LES асимптотически стремится к решению DNS. В этом состоит еще одно принципиальное отличие метода LES от метода RANS, в котором измельчение сетки приводит лишь к получению сеточно-независимых решений уравнений Рейнольдса и никак не сказывается на повышении точности физического моделирования. Все это делает построение подсеточных моделей для LES несравнимо более простой задачей, чем построение моделей турбулентности для замыкания уравнений RANS.

Естественной платой за описанные принципиальные преимущества LES является то, что вычислительные затраты при его использовании несопоставимо больше, чем при применении RANS. Это связано с необходимостью, как и в случае DNS, проведения трехмерных нестационарных расчетов на достаточно мелких сетках. С другой стороны, учитывая то, что мелкомасштабная часть спектра турбулентности в LES моделируется, а не рассчитывается “точно”, как в DNS, ресурсы, необходимые для реализации LES, оказываются существенно меньшими, чем для DNS. Так, для расчета свободных турбулентных течений число ячеек сетки, необходимое для проведения LES, увеличивается с ростом числа Рейнольдса намного медленнее, чем в случае DNS: пропорционально $Re^{0.4}$, а не $Re^{2.25}$ [18], что делает возможным проведение LES расчетов при достаточно высоких числах Рейнольдса уже в настоящее время. В противоположность этому, в пристеночных течениях размеры наиболее крупных (энергонесущих) вихрей вблизи обтекаемой поверхности становятся очень малыми, вследствие чего требования к сеткам для LES существенно ужесточаются и приближаются к аналогичным требованиям для DNS: число ячеек,

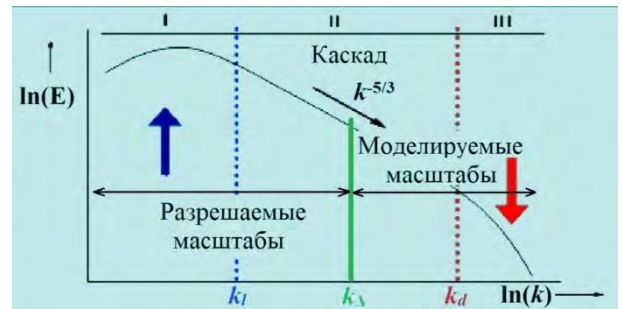


Рис. 6. Масштабы турбулентных структур, разрешаемые и моделируемые в рамках LES.

необходимых для LES таких течений пропорционально $Re^{1.8}$ [18]. Данный вывод наглядно иллюстрирует Рис. 7, из которого, в частности, следует, что для достаточно точного расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине с помощью LES даже при умеренном значении числа Рейнольдса 10^6 требуется сетка, содержащая более 300 миллионов ячеек.

С учетом этого в течение двух последних декад основные усилия в области развития метода LES применительно к расчету пристеночных течений были направлены на поиск путей, позволяющих тем или иным образом обойти указанную трудность. В результате было предложено два альтернативных подхода.

Исторически первый из них [20] впоследствии получил название LES пристеночным моделированием (*Wall Modeled LES* или *WMLES*). Его идея состоит в описании тонкой пристеночной области, для разрешения которой с помощью LES требуются очень мелкие сетки, с помощью различных приближенных методов, базирующихся на свойствах пограничного слоя и RANS моделях (см. обзоры [21], [22]).

Второй из упомянутых подходов является более «радикальным» и состоит в полном отказе от применения LES в присоединенных пограничных слоях и в использовании для их расчета RANS моделей. Первый подход такого типа - метод моделирования отсоединенных вихрей (*Detached-Eddy Simulation* или *DES*) был предложен в 1997 г. [23] и, благодаря своей простоте и эффективности, быстро получил исключительно широкое распространение. В частности, был предложен ряд модификаций DES, а также другие модели, базирующиеся на его основной идее (совместное использование RANS и LES подходов), которые в настоящее время составляют большую группу под общим условным названием незонных HRLM (иногда эти методы называют глобальными). Начиная с момента публикации DES в 1997 г., число работ, посвященных развитию и применению таких («DES-подобных») HRLM, экспоненциально растет (Рис. 8), что говорит о плодотворности идеи DES, с одной стороны, и об отсутствии полной удовлетворенности уже существующими моделями такого типа, с другой. Об этом свидетельствуют также монографии [24], [25], обзорные работы [26], [27] и труды международного симпозиума по HRLM [28] - [31], проводимого начиная с 2005 г. Более детальное описание и анализ незонных HRLM представлены в разделе 1.2 диссертации.

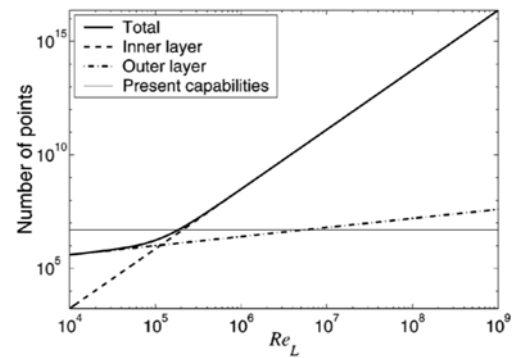


Рис. 7. Зависимость числа ячеек сетки во внутренней и внешней областях пограничного слоя на плоской пластине и общего числа ячеек, необходимых для LES данного течения от числа Рейнольдса (из [19]).

Другую большую группу HRLM составляют зонные методы, в которых границы между RANS и LES подобластями расчетной области должны задаваться априори, а не определяться в процессе расчета, как это делается в DES-подобных подходах. К ним относятся, например, *Zonal DES* или *ZDES* (его последняя версия детально описана в работе [32]) и *Anticipated DES (ADES)* [33]. В наиболее общей форме концепция зонных HRLM реализуется в так называемом встроенном LES, в рамках которого этого RANS и LES подобласти расчетной области могут располагаться по отношению друг к другу произвольным образом (см. схему на Рис. 9).

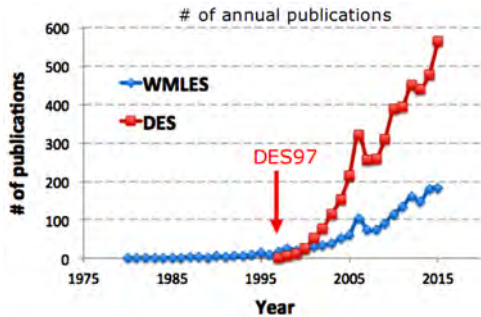


Рис. 8. Ежегодное количество работ, посвященных DES и WMLES (из [34]).

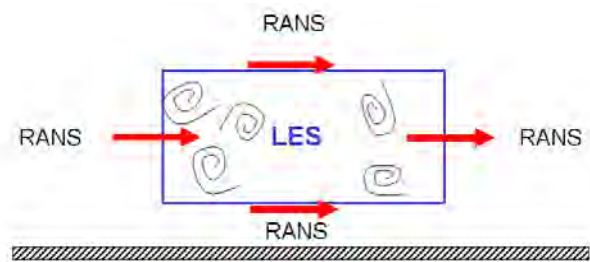


Рис. 9. Схема RANS и LES подобластей во встроенном LES (из [25]).

Это открывает возможность использования вычислительно трудоемкого метода LES только в той области или областях потока, которые не поддаются удовлетворительному описанию в рамках RANS, или в областях, где требуется получение информации о пульсационных характеристиках потока (как уже отмечалось, такая ситуация имеет место, например, при решении многих задач аэроакустики и аэроупругости). Однако при этом необходимо решение ряда сложных физических и технологических проблем, связанных со “сшивкой” RANS и LES решений на границах соответствующих подобластей.

В частности, при переходе от LES к RANS решению (правая граница на Рис. 9) требуется обеспечить плавное подавление турбулентных пульсаций [26]. В противоположность этому, для достижения быстрого перехода от полностью моделируемой турбулентности в RANS подобласти к “разрешенной” турбулентности в LES подобласти на соответствующих границах последней (левая граница на Рис. 9) необходимо вводить искусственные возмущения. Этой проблеме посвящено большое число работ, однако, несмотря на достигнутые в результате успехи, ее вполне удовлетворительного решения до сих пор не найдено. Кроме того, программная реализация предложенных методов является достаточно сложной и существенным образом опирается на специфику используемых вычислительных сеток и структуры хранения данных в соответствующих вычислительных кодах. Это затрудняет, а иногда и исключает возможность переноса этих методов из одного кода в другой.

Характеризуя зонные HRLM, в целом можно сказать, что их достоинство по сравнению с DES-подобными методами состоит в большей гибкости, а недостаток – в необходимости априорного задания границ RANS и LES подобластей, для чего требуются хотя бы примерные представления о структуре рассматриваемого течения, например, о положении линии отрыва потока.

Отметим, наконец, что многие из кратко описанных выше проблем, связанных с использованием как незонных, так и зонных HRLM, теоретически отсутствуют в так называемых “бесшовных” (*seamless*) RANS - LES гибридах, в которых оба подхода тем или иным образом “взвешиваются” и одновременно функционируют во всей расчетной области. Наиболее известным из таких методов является метод, базирующийся на частично осредненных уравнениях Навье-Стокса (*Partially Averaged Navier-Stokes* или *PANS*) [35]. Однако проблема построения весовых функций, автоматически обеспечивающих адекватные (соответствующие локальным размерам сетки) веса RANS и LES моделей в рассматриваемой точке потока остается, по существу, нерешенной, что существенно ограничивает практическое использование бесшовных RANS-LES подходов.

Таким образом, можно заключить, что гибридные методы имеют достаточно высокий и не до конца реализованный потенциал. Это позволяет предполагать, что в обозримом будущем они могут занять место RANS и стать доминирующими при расчете сложных турбулентных течений, в надежном предсказании которых испытывают острую нужду многие важнейшие отрасли науки и техники.

Представленный краткий анализ основных тенденций развития численного моделирования турбулентных течений на протяжении двух последних десятилетий позволяет ответить на поставленный в его начале вопрос о логике и месте исследований автора в этой области, результаты которых вошли в данную диссертацию. Эти исследования полностью лежат в русле указанных в обзоре тенденций и включают как фундаментальные работы, направленные на усовершенствование и всестороннее тестирование существовавших в начале этого периода моделей RANS и HRLM, так и на их применение к решению ряда сложных практических задач. Кроме того, в диссертации представлены результаты пионерских работ автора, посвященных применению методов классической линейной теории устойчивости (ЛТУ) к исследованию глобальной устойчивости турбулентных течений путем линейного анализа устойчивости соответствующих стационарных решений уравнений Рейнольдса.

Цели и задачи работы

Основные цели работы состоят в усовершенствовании методов моделирования пристеночных турбулентных течений и в применении разработанных методов для решения важных прикладных задач, связанных расчетом таких течений.

Конкретными задачами, которые решены в диссертации для достижения этих целей, являются:

- проведение аналитического обзора существующих методов численного моделирования пристеночных турбулентных течений и определение возможных путей их дальнейшего усовершенствования;
- расширение границ применимости и повышение надежности лучших из известных полуэмпирических моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса;
- усовершенствование глобальных гибридных вихреразрешающих RANS-LES подходов на базе двухпараметрической $k-\omega$ SST модели Ментера;
- разработка технологичных алгоритмов реализации зонных RANS-LES подходов при использовании неструктурированных сеток;
- всестороннее тестирование разработанных моделей и методов на основе сопоставления полученных с их использованием результатов с известными экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования;
- применение гибридных RANS-LES подходов для расчета ряда сложных пристеночных турбулентных течений, представляющих практический интерес;
- разработка методологии и построение алгоритмов для линейного анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса, их верификация, тестирование и применение для определения условий возникновения трансзвукового бафтинга крыла.

Научная новизна

1. Разработан ряд оригинальных модификаций двух наиболее успешных полуэмпирических моделей турбулентности для расчета пристеночных турбулентных течений, а именно, модели переноса турбулентной вязкости Спаларта-Аллмараса (SA модель) и двухпараметрической $k-\omega$ SST модели Ментера (SST модель). В частности, предложены:
 - две нелинейные модели турбулентности (BSL EARSM и SST NL), предназначенные для повышения точности расчета течений, в которых существенную роль играет анизотропия рейнольдсовых напряжений;
 - новая поправка для учета влияния кривизны линий тока и вращения потока для модели SST (модель SST RC1);
 - модификация модели SST, обеспечивающая повышение точности расчета обтекания аэродинамических профилей при условиях близких к срыву потока (модель SST HL);

- две модификации модели SA, обеспечивающие повышение точности расчета осесимметричных течений (модель SA TC) и пограничных слоев при низких значениях числа Рейнольдса (модель SA Low-Re).
2. Предложены важные усовершенствования существующих гибридных вихререшающих RANS-LES подходов к моделированию турбулентности, а именно:
- предложены две модификации известных глобальных (незонных) методов DDES и IDDES на основе базовой SST модели, одна из которых повышает надежность предотвращения нежелательной активации LES-моды в присоединенных пограничных слоях, а другая позволяет без потери точности существенно упростить формулировку метода;
 - выполнена адаптация двух эффективных методов ускорения перехода от полностью моделируемой к разрешенной турбулентности в оторвавшихся слоях смешения, разработанных для базовой SA модели, к гибридным RANS-LES подходам на базе SST модели;
 - разработана эффективная технология реализации одностадийного зонного RANS-LES подхода с использованием объемных источников в уравнениях переноса импульса и кинетической энергии турбулентности для генерации турбулентного контента на интерфейсе между RANS и LES зонами, применимая на произвольных (как структурированных, так и неструктурированных) сетках.
3. Разработана новая гибридная конечно-объемная схема для аппроксимации невязких составляющих векторов газодинамических потоков в рамках глобальных гибридных RANS-LES подходов, одновременно обеспечивающая устойчивость алгоритма и высокую точность разрешения турбулентных вихревых структур при расчете как присоединенных, так и отрывных пристеночных течений.
4. С использованием гибридных вихререшающих RANS-LES подходов получены новые данные об аэродинамических/аэроакустических характеристиках ряда сложных пристеночных течений. В частности, рассмотрены:
- поперечное обтекание тандема цилиндров;
 - обтекание трехэлементного аэродинамического профиля DLR-F15;
 - обтекание модельной конфигурации крыло – закрылок;
 - транс- и сверхзвуковое обтекание возвращаемого аппарата и отделяемого головного блока пилотируемого космического корабля в режимах взлета и аварийного отделения от ракеты-носителя.

5. Разработан новый зонный RANS-DNS-IDDES подход, с помощью которого выполнен расчет трансзвукового обтекания выпуклости на цилиндрической поверхности, сопровождающегося формированием скачка уплотнения с последующим отрывом и присоединением пограничного слоя, на рекордной для России расчетной сетке 8.3 миллиарда узлов.
6. Предложен новый подход к анализу глобальной устойчивости турбулентных течений, базирующийся на линейном анализе устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса, и разработаны соответствующая экономичная методология и численные алгоритмы, с помощью которых определены параметры потока, отвечающие началу трансзвукового бафтинга прямого и стреловидного крыльев бесконечного размаха.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит:

- в разработке новых полуэмпирических моделей турбулентности и гибридных RANS-LES моделей;
- в изучении закономерностей ряда турбулентных течений, представляющих значительный теоретический интерес;
- в новом подходе к анализу глобальной устойчивости турбулентных течений и разработке соответствующей методологии для проведения линейного анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса.

Практическая значимость работы состоит:

- в повышении точности расчета ряда важных с практической точки зрения течений в рамках уравнений Рейнольдса;
- в упрощении и повышении точности гибридных моделей DDES и IDDES на базе модели турбулентности SST;
- в разработке новой гибридной схемы для аппроксимации невязких составляющих газодинамических потоков, обеспечивающей повышение точности расчета в рамках глобальных гибридных RANS-LES подходов;
- в получении детальных расчетных данных по нестационарным аэроакустическим нагрузкам на элементы пилотируемого космического корабля при полете в плотных слоях атмосферы;
- в создании экономичной методологии определения условий начала трансзвукового бафтинга крыла и в получении соответствующих расчетных данных для различных аэродинамических профилей крыла.

Методология и методы исследования

В диссертации применяется ставшая в настоящее время классической методология численного моделирования турбулентных течений, базирующаяся на полуэмпирической и статистической теориях турбулентности и на методах численного интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих общие законы сохранения массы, импульса и энергии в потоках вязкой жидкости и газа.

При этом в качестве основного вычислительного инструмента используется академический конечно-объемный CFD код “Numerical Turbulence Simulation” (NTS). Он прошел тщательную верификацию путем сравнения с известными аналитическими решениями и с результатами численных расчетов, полученными с помощью других известных кодов (ANSYS FLUENT и ANSYS CFX, DLR TAU, NOISEtte, SINF и др.) и на протяжении почти трех десятилетий успешно применяется для расчета турбулентных течений в рамках RANS, LES, DNS и гибридных RANS-LES подходов.

Наконец, для анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса применяются методы классической линейной теории устойчивости. Поиск собственных значений и собственных векторов линейного дифференциального оператора осуществляется численно с дискретизацией на той же расчетной сетке, что и исследуемое решение.

Положения, выносимые на защиту

1. Модификации известных полуэмпирических моделей турбулентности, обеспечивающие повышение их точности и/или расширение границ применимости:
 - две нелинейные модели, предназначенные для расчета течений, в которых существенную роль играет анизотропия рейнольдсовых напряжений (модели BSL EARSM и SST NL);
 - две модификации линейной модели SST, обеспечивающие повышение точности расчета обтекания аэродинамических профилей при условиях близких к срыву потока (модель SST HL), а также течений, в которых существенно проявляется влияние кривизны линий тока и вращения (модель SST RC1);
 - две модификации модели SA для повышения точности расчета осесимметричных течений (модель SA TC) и присоединенных пограничных слоев при низких числах Рейнольдса (модель SA Low Re).
2. Новые формулировки “глобальных” гибридных RANS-LES моделей DDES и IDDES на базе модели SST:
 - упрощение формулировок и исключение возможности активации LES-моды в присоединенных пограничных слоях;

- новая незонная гибридная RANS-LES модель SST σ -DDES, обеспечивающая значительное ускорение формирования разрешаемых турбулентных структур в оторвавшихся слоях смешения.
3. Технология реализации зонных гибридных RANS-LES подходов, обеспечивающая возможность их использования на произвольных, в том числе неструктурированных сетках.
 4. Новая гибридная численная схема, обеспечивающая устойчивость и низкую диссипативность вычислительного алгоритма в рамках глобальных гибридных RANS-LES подходов.
 5. Полученные с использованием гибридных RANS-LES подходов новые количественные данные об аэродинамических и аэроакустических характеристиках ряда сложных пристеночных турбулентных течений:
 - поперечное обтекание тандема цилиндров;
 - обтекание трехэлементного аэродинамического профиля DLR-F15;
 - обтекание модельной конфигурации крыло – закрылок;
 - транс- и сверхзвуковое обтекание возвращаемого аппарата и отделяемого головного блока пилотируемого космического корабля.
 6. Новый подход к анализу глобальной устойчивости турбулентных течений на основе линейного анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса, реализующие этот подход методология и вычислительные алгоритмы, а также результаты их применения для определения условий начала трансзвукового бафтинга на прямых и стреловидных крыльях.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается:

- использованием математических моделей, основанных на фундаментальных законах сохранения механики жидкости и газа;
- проверкой отсутствия существенной зависимости полученных решений от расчетной сетки, шага интегрирования по времени (при расчете нестационарных течений) и размеров расчетной области, что гарантирует отсутствие значительных вычислительных погрешностей;
- хорошим согласованием результатов, полученных в диссертации с использованием NTS кода и с помощью кода ANSYS FLUENT, прошедшего независимую верификацию в огромном числе исследований;
- детальным физическим анализом полученных результатов, с одной стороны, и сравнением этих результатов с экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования, известными из литературы, с другой.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях и семинарах:

1. Европейская конференция по аэрокосмическим наукам EUCASS (2005, 2009, 2011).
2. Международный симпозиум “Global Flow Instability and Control” (Крит, Греция, 2005, 2009).
3. Международный симпозиум по гибридным RANS-LES подходам – HRLM (2005, 2009, 2011, 2014).
4. Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева (Россия, 2005, 2011, 2013, 2015, 2017).
5. 60th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics (Солт-Лейк-Сити, США, 2007).
6. IUTAM symposium on Unsteady Separated Flows and their Control (Корфу, Греция, 2007).
7. Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и в ствольных системах ICOC (Санкт-Петербург, Россия, 2008).
8. AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference (США, 2008, 2011).
9. Workshop on Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations II (Пиза, Италия, 2009).
10. Международная конференция “Computational Experiment in Aeroacoustics” (Светлогорск, Россия, 2010, 2014, 2016, 2018).
11. AIAA-NASA Workshop on Benchmark Problems for Airframe Noise Computations - I BANC-I (Стокгольм, Швеция, 2010).
12. Симпозиум по безопасности ядерных реакторов CFD4NRS-4, (Тэчжон, Южная Корея, 2012).
13. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ - ИТПМ СО РАН - СПбПУ - НИИМ МГУ (Санкт-Петербург, Россия, 2012, 2017).
14. International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena TSFP8 (Осака, Япония, 2013).
15. Международная молодежная конференция по физике и астрономии Физика.СПб (Санкт-Петербург, Россия, 2013, 2015, 2016, 2017).
16. European Conference on Computational Fluid Dynamics ECFD VI (Барселона, Испания, 2014).
17. Российская национальная конференция по теплообмену РНКТ (Москва, Россия, 2014, 2018).
18. International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements ETMM (2014, 2016).
19. 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS (Крит, Греция, 2016).
20. Международная конференция «Суперкомпьютерные дни в России» (Москва, Россия, 2016).
21. Международная конференция «Современные проблемы теплофизики и энергетики» (Москва, Россия, 2017).
22. AIAA Fluid Dynamics Conference (Атланта, США, 2018).
23. XXV всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям (Санкт-Петербург, Россия, 2018).

Структура работы

Глава 1 диссертации посвящена более детальному аналитическому обзору существовавших на момент начала исследований (нулевые годы текущего века) подходов к моделированию пристеночных турбулентных течений, базирующихся на полуэмпирических моделях для уравнений Рейнольдса (раздел 1.1) и HRLM (раздел 1.2).

В **Главе 2** представлены новые результаты, полученные автором в области усовершенствования RANS моделей турбулентности. В ней приводятся математические формулировки усовершенствованных моделей (раздел 2.1), численный метод, используемый для их реализации (раздел 2.2) и результаты их верификации и тестирования на примере большого числа течений, для расчета которых они предназначены (раздел 2.3).

Глава 3, посвященная исследованиям в области гибридного RANS-LES моделирования, имеет структуру аналогичную Главе 2. В ее первом разделе 3.1 представлены усовершенствованные автором гибридные модели, во втором – численный метод, используемый для реализации этих моделей, а в третьем – результаты их тестирования.

В **главе 4** представлены примеры применения HRLM для решения задач аэродинамики и аэроакустики, связанных с определением осредненных и пульсационных характеристик в сложных пристеночных турбулентных течениях. Эти примеры убедительно иллюстрируют высокий потенциал HRLM и, в то же время, демонстрируют наличие в этой области все еще нерешенных проблем.

Наконец, в **Главе 5** подробно описан комплекс методов, разработанных для анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса, представлены результаты верификации этих методов на примерах решения ряда канонических задач об устойчивости ламинарных и турбулентных течений, а также результаты их применения для предсказания условий начала трансзвукового бафтинга на прямых и стреловидных крыльях бесконечного размаха.

В **Заключении** кратко сформулированы основные новые результаты, полученные автором и выносимые им на защиту.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность всем тем, без кого эта работа никогда бы не появилась. В первую очередь это Alma Mater – кафедра «Гидроаэродинамика» Физико-Механического факультета Ленинградского Политехнического Института им. Калинина, как бы она ни называлась сейчас и в будущем. Огромное спасибо моим учителям, пробудившим у меня интерес к проблеме турбулентности, в частности, Юрию Викторовичу Лапину, Николаю Ивановичу Акатнову и, в особенности, Михаилу Хаимовичу Стрельцу, под руководством которого почти четверть века проходила моя работа. Большую благодарность хочется выразить моим коллегам, в тесном сотрудничестве с которыми были получены представленные ниже результаты. Это все те, кто входят или когда-то входили в группу М.Х. Стрельца, а также Филип Спаларт и Джеффри Кроуч из компании Boeing, Флориан Менгер из компании ANSYS, Анатолий Александрович Дядькин и Сергей Петрович Рыбак из РКК «Энергия».

ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В данной главе приведен аналитический обзор методов расчета пристеночных турбулентных течений, используемых для решения практических задач. В нем не рассматриваются дорогостоящие «классические» вихреразрешающие подходы DNS и LES поскольку, как уже было сказано во Введении, возможностей современных вычислительных систем недостаточно для их использования в инженерной практике. В обзоре проанализированы наиболее успешные полуэмпирические модели турбулентности для замыкания уравнений RANS и гибридные RANS-LES подходы (HRLM), а также определено место, занимаемое в их ряду моделями, предложенными автором (Главы 2 и 3).

1.1. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Как уже было сказано во Введении, расчет турбулентных течений, основанный на решении уравнений Рейнольдса, является в настоящее время основным подходом, используемым для решения практических задач. Эти уравнения сформулированы относительно осредненных по времени характеристик течения, представляющих основной интерес в задачах аэродинамики, и содержат неизвестный тензор рейнольдсовых напряжений и вектор турбулентного теплового потока, описывающие влияние турбулентности на эти характеристики. Дополнительные соотношения, связывающие эти величины с характеристиками осредненного движения, принято называть полуэмпирическими моделями турбулентности. Понимание современных тенденций развития полуэмпирических моделей турбулентности было бы недостаточно полным без краткого исторического обзора исследований в этой области.

Использование уравнений Рейнольдса для решения задач аэродинамики началось вскоре после появления первых ЭВМ в середине прошлого века. К этому периоду следует отнести появление и развитие алгебраических моделей турбулентности (работы Клаузера [36], Клебанова [37], Ван-Дрифта [38]), а также появление модели Ротта [39] - первой модели, основанной на решении дифференциальных уравнений переноса напряжений Рейнольдса (*Reynolds Stress Transport Model – RSTM*).

Неудовлетворенность точностью получаемых результатов привела к лавинообразному появлению различных моделей турбулентности. К середине 60х годов XX века количество созданных моделей выросло настолько, что стала очевидной необходимость их систематизации и оценки точности получаемого решения для различных типов течений. Координирующую роль в

этой работе взял на себя Стэнфордский университет, на базе которого в 1968 году была проведена первая Стэнфордская конференция [40], неофициально названная «Олимпиада моделей турбулентности». Стэнфордская конференция положила начало важному направлению моделирования турбулентности - исследованиям, направленным на валидацию и определение границ применимости полуэмпирических моделей. Принимая во внимание вышеупомянутую невозможность создания универсальной модели турбулентности, результаты подобных исследований необходимы для выбора конкретной модели при решении той или иной практической задачи, а также для оценки точности получаемого решения.

В дальнейшем эта работа продолжилась как усилиями отдельных исследовательских групп, так и в рамках масштабных международных программ, координируемых NASA и Европейской комиссией по развитию научных исследований. В частности, NASA был создан специальный постоянно обновляемый интернет-портал [41], который содержит формулировки наиболее распространенных моделей турбулентности, “эталонные” результаты расчетов различных течений, полученные с их использованием, и экспериментальные данные, которые могут служить для валидации эти моделей. Аналогичный ресурс был создан и поддерживается Европейским Сообществом по Течениям, Турбулентности и Горению (ERCOTAC) [42]. На решение той же проблемы (усовершенствование и валидация моделей турбулентности) направлено большое число крупных международных проектов, финансируемых ЕС (например, проекты ECARP [43], FLOMANIA [44] и ATAAC [11]). Наконец, важную роль в этой сфере играют рабочие семинары (*workshops*), на которых результаты расчетов, полученные отдельными исследовательскими группами с применением различных моделей турбулентности, сравниваются со специально отобранными (достаточно надежными и информативными) экспериментальными данными и с результатами расчетов в рамках LES и DNS. В результате всех этих целенаправленных усилий удалось накопить обширную и, что особенно важно, объективную (практически свободную от вычислительных неточностей) информацию о возможностях различных RANS моделей.

На протяжении более чем двух десятилетий автор принимал непосредственное участие в работе по валидации моделей турбулентности. В частности, он участвовал в проектах FLOMANIA [44] и ATAAC [11], валидации RANS моделей в значительной мере была посвящена диссертация на соискание кандидата физико-математических наук [45], а также ряд статей [46] - [50] и др.

Определяющим событием в развитии моделей турбулентности стало появление в конце 60х годов модели с двумя дифференциальными уравнениями для кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации ϵ [51]. По точности расчета свободных сдвиговых течений эта модель существенно превосходила все существовавшие к тому времени модели турбулентности.

Модели типа k - ε быстро совершенствовались, появились модификации, предназначенные для расчета пристеночных течений (их называют низкорейнольдсовыми k - ε модели), точность решения многих задач существенно выросла. В 1975 году Лаундер, Рис и Роди [52] предложили первую по-настоящему работоспособную модель рейнольдсовых напряжений. В их работе были изложены основные идеи построения дифференциальных моделей рейнольдсовых напряжений, а предложенная модель LRR не только используется до сих пор, но и является основой для разработки новых моделей, выходящих за рамки гипотезы Буссинеска.

Значительные успехи в области построения различных полуэмпирических моделей турбулентности, достигнутые в 60х – 70х годах, породили надежду на создание универсальной RANS модели, то есть модели, пригодной для расчета любых или, по крайней мере, большинства турбулентных течений. К сожалению, этим надеждам не суждено было реализоваться. Основной причиной неудачи, как уже отмечалось во Введении, оказалось существенное глобальное влияние устойчивых, крупномасштабных (с размерами порядка характерного масштаба течения), принципиально трехмерных и нестационарных структур на осредненные параметры турбулентных потоков. Характеристики этих структур зависят от конкретной геометрии рассматриваемого течения и граничных условий. Иными словами, “гипотеза локальности”, на которой в неявной форме базируются RANS модели турбулентности, не выполняется [9], что в принципе исключает возможность построения идеальной модели такого типа. Отсутствие существенного прогресса в моделировании турбулентности в 80е годы привело к разочарованию в методе RANS и к определенному «застою» в развитии полуэмпирических моделей турбулентности.

Ситуация принципиально изменилась на рубеже 80х - 90х годов. Осознание невозможности создания универсальной модели, пригодной для расчета всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений, привело к существенному повороту вектора исследований: попытки построить универсальную модель турбулентности уступили место разработке моделей, обеспечивающих высокую точность расчета определенных классов течений. В последующие несколько лет появилось большинство моделей, используемых в настоящее время для замыкания уравнений Рейнольдса.

В 1992 году Александр Николаевич Секундов предложил дифференциальную модель v_t -92, использующую одно уравнение для турбулентной вязкости [53]. Хотя эта модель не получила широкого распространения, она вплоть до настоящего времени остается одной из наиболее точных моделей для расчета струйных течений.

В том же 1992 году сотрудниками компании Boeing Филипом Спалартом и Стивеном Алларасом была разработана модель с одним дифференциальным уравнением для переноса турбулентной вязкости SA [54], принципы построения которой существенно отличались от принципов

построения модели v_t -92. Эта модель изначально разрабатывалась для решения задач внешней аэродинамики, но оказалось, что область ее применимости гораздо шире и она по праву является одной из наиболее часто используемых моделей турбулентности в настоящее время.

Турбулентная динамическая вязкость μ_t в модели SA определяется через вспомогательную переменную $\tilde{\nu}$ (высокорейнольдсовую кинематическую вязкость):

$$\mu_t = f_{v1} \rho \tilde{\nu}, \quad (1.1)$$

где $f_{v1} = \chi^3 / (\chi^3 + C_{v1}^3)$, $\chi = \rho \tilde{\nu} / \mu$, а ρ и μ - плотность и динамическая молекулярная вязкость, соответственно.

Величина $\tilde{\nu}$ определяется из следующего дифференциального уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \partial \rho \tilde{\nu} / \partial t + \partial \rho u_k \tilde{\nu} / \partial x_k = \rho C_{b1} (f_{r1} - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \rho (C_{w1} f_w - f_{t2} C_{b1} / \kappa^2) (\tilde{\nu} / d_w)^2 + \\ + ((1 + C_{b2}) \partial ((\mu + \rho \tilde{\nu}) \partial \tilde{\nu} / \partial x_k) / \partial x_k - C_{b2} (\mu + \rho \tilde{\nu}) [\partial^2 \tilde{\nu} / \partial x_k \partial x_k]) / \sigma, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\tilde{S} = \min(10^{-5}, \Omega + f_{v2} \tilde{\nu} / (\kappa^2 d_w^2)), \quad f_{v2} = 1 - \chi / (1 + \chi f_{v1}), \quad f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4} \chi^2), \quad (1.3)$$

$$f_w = g \left([1 + C_{w3}^6] / [g^6 + C_{w3}^6] \right)^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \tilde{\nu} / (\tilde{S} \kappa^2 d_w^2). \quad (1.4)$$

Функция f_{t1} , введенная в уравнение для инициирования ламинарно-турбулентного перехода (*trip-term*) имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{t1} = C_{t1} g_t \exp\left(-C_{t2} (d_w^2 + g_t^2 d_t^2) \omega_t^2 / |\vec{U}|^2\right), \quad g_t = \min(0.1, |\vec{U}| / \omega_{trip} \cdot \Delta x_{trip}), \\ d_t^2 = (z - z_{trip})^2 + (y - y_{trip})^2 + (x - x_{trip})^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где d_w – расстояние от рассматриваемой точки потока до твердой поверхности, $(x_{trip}, y_{trip}, z_{trip})$ – заданные координаты точки перехода, Δx_{trip} – шаг сетки вдоль стенки в точке перехода, ω_{trip} – завихренность на стенке в точке перехода, а $|\vec{U}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ – локальная скорость.

При расчете высокоскоростных течений модель Спаларта-Аллмараса часто используется совместно с поправкой на сжимаемость потока, заимствованной из модели v_t -92 [53] (эту модель принято называть SA CC), эффективность которой была продемонстрирована, например, в [55]. При использовании этой поправки в правую часть уравнения (1.2) входит дополнительное слагаемое

$$-C_s \rho \tilde{\nu}^2 S^2 / a^2, \quad (1.6)$$

где a – скорость звука.

Величины S и Ω , входящие в (1.3) и (1.6), определяются выражениями

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (1.7)$$

$$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad (1.8)$$

и являются инвариантами симметричного тензора скоростей деформаций

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \quad (1.9)$$

и антисимметричного тензора завихренности

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_{kji} \Omega_k. \quad (1.10)$$

Здесь Ω_k – скорость вращения системы координат (при расчете вращающихся течений в неинерциальной системе отсчета).

Эмпирические константы модели Спаларта-Аллмараса равны:

$$\kappa = 0.41, \sigma = 2/3, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622, C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2, \quad (1.11)$$

$$C_{v1} = 7.1, C_{t1} = 1, C_{t2} = 2, C_{t3} = 1.2, C_{t4} = 0.5, C_5 = 3.5.$$

В 1993 году Ф. Менгером была предложена новая версия модели, основанной на уравнениях для переноса кинетической энергии турбулентности k и удельной скорости ее диссипации ω [56], получившая название *Shear Stress Transport (SST)*. Многолетний опыт ее использования (см., например, [57]) показал, что по совокупности своих качеств она является одной из лучших, если не лучшей, среди существующих RANS моделей турбулентности.

Модель SST представляет собой комбинацию двух хорошо известных к моменту ее создания моделей турбулентности, а именно стандартной k - ε модели [58] и k - ω модели Вилкокса [59], и сочетает в себе лучшие качества этих моделей. Так, k - ε модель хорошо зарекомендовала себя при расчете свободных сдвиговых течений (в том числе и струйных), для анализа которых собственно и была предназначена ее первая версия, предложенная Харлоу [51], а k - ω модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев [60]. С учетом этих обстоятельств, Менгером [56] было предложено объединить эти модели с использованием специально сконструированной для этого эмпирической функции F_1 :

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}, \frac{500\nu}{\omega d_w^2} \right), \frac{2k\omega}{d_w^2 (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)} \right], \quad (1.12)$$

которая обеспечивает близость итоговой модели к модели k - ε вдали от твердых стенок и к модели k - ω в пристеночной части потока (d_w - расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей точки твердой поверхности). Эта версия k - ω модели, названная автором BSL (*baseline*), свободна от основного недостатка, характерного для k - ω моделей, состоящего в чрезвычайной чувствительности к величине удельной диссипации ω во внешнем потоке. Масштабы турбулентности k и ω в BSL модели определяются из следующих уравнений переноса:

$$\begin{cases} \partial \rho k / \partial t + \partial \rho u_k k / \partial x_k = \partial [(\mu + \sigma_k \mu_t) \partial k / \partial x_k] / \partial x_k + P_k - \beta^* \rho \omega k \\ \partial \rho \omega / \partial t + \partial \rho u_k \omega / \partial x_k = \partial [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \partial \omega / \partial x_k] / \partial x_k + \gamma P_k \rho \omega / k - \beta \rho \omega^2 + (\partial k / \partial x_k) (\partial \omega / \partial x_k) \sigma_d / \omega, \end{cases} \quad (1.13)$$

где

$$P_k = \min\left(-\overline{u'_i u'_j} \partial U_i / \partial x_j, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega\right), \quad (1.14)$$

напряжения Рейнольдса вычисляются с использованием гипотезы Буссинеска

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2 \nu_t S_{ij}, \quad (1.15)$$

а константы модели определяются через соответствующие константы k - ε (нижний индекс “1”) и k - ω (индекс “2”) ветвей с использованием весовой функции F_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, \quad \sigma_{k1} = 0.5, \quad \sigma_{k2} = 1.0, \\ \sigma_\omega &= F_1 \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega2}, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega2} = 0.856, \\ \beta &= F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta_2 = 0.0828, \\ \sigma_d &= 2(1 - F_1) \sigma_{\omega2}, \quad \beta^* = C_\mu = 0.09, \quad \gamma = \beta / \beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Турбулентная вязкость в модели BSL определяется выражением

$$\mu_t = \rho k / \omega. \quad (1.17)$$

Однако для BSL модели, как и для большинства дифференциальных моделей с двумя уравнениями, характерно завышение турбулентной вязкости в пограничном слое при наличии положительного градиента давления. В случае отрыва пограничного слоя от гладкой поверхности это приводит к сдвигу положения отрыва вниз по потоку, что может существенно снизить точность результатов расчета. Для устранения этого недостатка в выражение для расчета турбулентной вязкости был добавлен ограничитель, построенный на идеях модели переноса касательного напряжения (*Shear Stress Transport – SST*) Брэдшоу [61], признанной лучшей на Стэнфордской конференции 1968 года [40], и давшей название модели SST:

$$\mu_t = a_1 \rho k / \max(a_1 \omega, S \cdot F_2), \quad (1.18)$$

где инвариант тензора скоростей деформаций S определяется выражением (1.7), а константа $a_1 = 0.31$. Эмпирическая функция F_2 , входящая в (1.18), рассчитывается по формуле

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left(2\sqrt{k}/(0.09\omega d_w), 500\nu/(d_w^2\omega)\right). \quad (1.19)$$

Использование этого ограничителя привело к необходимости рекалибровки модели и увеличения константы σ_{k1} до значения

$$\sigma_{k1} = 0.85. \quad (1.20)$$

Из других моделей, предложенных в первой половине 90х годов, следует отметить дифференциальную модель Дурбина [62], содержащую три уравнения переноса турбулентных характеристик, и модель переноса рейнольдсовых напряжений SSG [63]. Несколько позже, в 1996 году, была разработана явная алгебраическая модель WJ EARSМ [64], в которой вместо линейной гипотезы Буссинеска для расчета тензора напряжений Рейнольдса использовались выведенные на основе модели LRR [52] нелинейные алгебраические соотношения.

Дальнейшее развитие полуэмпирических моделей турбулентности связано, в первую очередь, с новыми возможностями, открывшимися в конце XX века в связи с быстрым развитием вычислительной техники.

Так, рост производительности компьютеров открыл принципиальную возможность применения методов вычислительной гидроаэродинамики (*Computational Fluid Dynamics – CFD*) для предсказания характеристик исключительно сложных течений, расчет которых был ранее невозможен. При этом было выяснено, что в ряде случаев точность расчета таких течений оказывается неудовлетворительной, причем основной причиной этого являются именно недостатки моделей турбулентности. Это, естественно, послужило стимулом для поиска путей устранения выявленных недостатков. Наряду с этим, увеличение геометрической сложности рассматриваемых течений и рост размеров используемых вычислительных сеток привели к необходимости использования неструктурированных сеток и параллельных вычислительных технологий. Оба эти обстоятельства обусловили появление новых требований к моделям турбулентности, в частности, к нежелательности использования в них нелокальных характеристик потока, таких как толщина пограничного слоя или напряжение трения на ближайшей стенке.

Еще одной характерной особенностью рассматриваемого периода является неуклонный рост доли прикладных расчетов, проводимых с помощью коммерческих программных пакетов, предназначенных, главным образом, для инженеров и проектировщиков, а не для специалистов в области CFD. В связи с этим, существенно возросли требования к вычислительной надежности моделей турбулентности, то есть к возможности получения сошедшегося решения жесткой системы уравнений, характерной для многих из них, без «ручного» подбора соответствующих

управляющих параметров вычислительных алгоритмов (как правило, такой подбор используется при проведении расчетов CFD экспертами с помощью академических кодов).

Таким образом, в XXI веке исследования, направленные на развитие полуэмпирических моделей турбулентности, ведутся в двух основных направлениях. Первое из них связано с повышением точности существующих моделей при расчете тех или иных конкретных типов течений путем их модификации и/или введения соответствующих поправок, учитывающих специфику этих течений, а второе – с повышением их вычислительной устойчивости и надежности. Достижению этих целей посвящены и разработки автора в данной области, представленные в Главе 2. Остановимся более подробно на предпосылках, обусловивших выбор базовых моделей для последующего усовершенствования.

Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений

Появление моделей, в которых используются полученные тем или иным способом явные алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и характеристиками осредненного течения (*Explicit Algebraic Stress Models – EARSM*), было вызвано неудовлетворенностью моделями, основанными на дифференциальных уравнениях переноса напряжений Рейнольдса (RSTM). В частности, при создании и использовании RSTM возникает целый ряд проблем физического и вычислительного характера, часть из которых не решена вплоть до настоящего времени [65]. К числу наиболее серьезных физических проблем относится необходимость моделирования различных слагаемых, входящих в правые части уравнений RSTM. Это приводит к появлению в RSTM большого числа эмпирических констант, калибровка которых, то есть определение оптимальных значений на основе сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными, является чрезвычайно сложной и трудоемкой задачей, решение которой неизбежно включает определенные компромиссы. Вычислительные трудности, возникающие при практическом применении RSTM, связаны с их громоздкостью (7 дифференциальных уравнений переноса при расчете изотермических и 10 – при расчете неизотермических течений) и сильной нелинейностью. В результате, для проведения расчетов с помощью этих моделей требуется применение специальных трудоемких вычислительных алгоритмов, обеспечивающих итерационную сходимость решения (например, применение векторных прогонок в сочетании с использованием релаксационных процедур), и значительно бóльшие вычислительные ресурсы, чем при использовании линейных моделей.

С точки зрения общности, EARSM занимают промежуточное положение между RSTM и моделями, использующими гипотезу Буссинеска и позволяют с приемлемой точностью описать часть физических явлений, предсказываемых в рамках RSTM, но выходящих за рамки гипотезы Буссинеска и моделей турбулентной вязкости.

Одним из таких течений является поток вдоль внутренней грани двухгранного угла, имеющий место в таких важных с практической точки зрения задачах, как обтекание основания турбинных лопаток или сочленения крыла самолета с его фюзеляжем. Многократно было показано, в том числе и в исследованиях автора [66], [67], что линейные модели турбулентности предсказывают слишком ранний угловой отрыв, вызванный положительным градиентом давления вдоль потока, и аномально большую область рециркуляции за ним. Модели, не использующие гипотезу Буссинеска, в том числе нелинейные модели турбулентности, предсказывают наличие вторичных токов, направленных к углу (см., например, [5]), прижимающих поток и предотвращающих угловой отрыв.

Следует, однако, отметить, что не все явления, описываемые с использованием RSTM, могут быть предсказаны в рамках EARSM. Одним из наиболее серьезных недостатков EARSM считается неспособность, в отличие от RSTM, предсказать влияние кривизны линий тока и вращения потока на характеристики турбулентности. Поэтому для EARSM, как и для моделей турбулентной вязкости, необходимы специальные поправки для учета влияния кривизны и вращения.

Систематическая методология построения EARSM, получившая достаточно широкое распространение, была предложена в работе Поупа [68]. Она базируется на предположении о том, что напряжения Рейнольдса зависят только от компонент тензора градиента скорости $\partial u_i / \partial x_j$. В этом случае тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - \frac{2}{3} \delta_{ij}$ может быть представлен в форме линейной комбинации 10 симметричных девиаторных тензорных групп⁴

$$a_{ij} = \sum_{n=1}^{10} \beta_n T_{n,ij}, \quad (1.21)$$

зависящих только от симметричного тензора скоростей деформаций S_{ij} (1.9) и антисимметричного тензора завихренности Ω_{ij} (1.10). Входящие в (1.21) тензоры $T_{n,ij}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} T_{1,ij} &= S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}, & T_{2,ij} &= S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} II_S, & T_{3,ij} &= \Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} II_\Omega, & T_{4,ij} &= S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}, \\ T_{5,ij} &= S_{ik} S_{kl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} S_{kl} S_{lj}, & T_{6,ij} &= S_{ik} \Omega_{kl} \Omega_{lj} + \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lj} - \frac{2}{3} IV, \\ T_{7,ij} &= S_{ik} S_{kr} \Omega_{rl} \Omega_{lj} + \Omega_{ik} \Omega_{kr} S_{rl} S_{lj} - \frac{2}{3} V, & T_{8,ij} &= S_{ik} \Omega_{kr} S_{rl} S_{lj} - S_{ik} S_{kr} \Omega_{rl} S_{lj}, \\ T_{9,ij} &= \Omega_{ik} S_{kr} \Omega_{rl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} \Omega_{kr} S_{rl} \Omega_{lj}, & T_{10,ij} &= \Omega_{ik} S_{km} S_{mr} \Omega_{rl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} \Omega_{km} S_{mr} S_{rl} \Omega_{lj}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

а коэффициенты β_n являются функциями пяти тензорных инвариантов

⁴ Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющемуся индексу (правило Эйнштейна).

$$II_S = S_{kl}S_{lk}, II_\Omega = \Omega_{kl}\Omega_{lk}, III = S_{kl}S_{lm}S_{mk}, IV = S_{kl}\Omega_{lm}\Omega_{mk}, V = S_{kr}S_{rl}\Omega_{lm}\Omega_{mk}. \quad (1.23)$$

Полученные на этой основе различные EARSM отличаются между собой количеством ненулевых коэффициентов β_n в (1.21), а также максимальным показателем степени производных скорости, входящих в тензорные группы. Увеличение количества ненулевых членов, в принципе, повышает точность модели, однако при этом значительно усложняется ее калибровка, что может свести на нет потенциальное повышение точности, а также увеличивается вычислительная трудоемкость модели.

В той же работе [68] Поуп предложил методику вычисления коэффициентов β_n в (1.21) на основе RSTM и некоторых дополнительных предположений. Однако формулировка модели, полученной Поупом с использованием этой методики и RSTM LRR [52], оказалась слишком сложной и модель не получила широкого распространения.

В 70е - 90е годы был предложен целый ряд EARSM, как использовавших идеи Поупа и RSTM SSG [63] (см., например, [69], [70], и др.), так и построенных на других физических предположениях (см., например, [71] - [75] и др.). Модели, в которых выражения для напряжений Рейнольдса являются эмпирическими, а не выводятся из RSTM, часто называют нелинейными моделями турбулентной вязкости (*Non-linear Eddy Viscosity Models – NLEVM*). Различие между EARSM и NLEVM является непринципиальным, так как при “выводе” выражений для β_n в (1.21) используются допущения, не вытекающие из каких-либо теоретических соображений, что делает их, по существу, также эмпирическими. Из NLEVM наиболее широкое распространение в последние годы получила модификация модели Спаларта-Аллмараса SA [54] с квадратичными замыкающими соотношениями (*Quadratic Constitutive Relations* или *QCR*) [5].

Одной из наиболее удачных EARSM, построенных по методике Поупа, является вышеупомянутая алгебраическая модель Валлина-Йохансона WJ [64], [76]. Эта модель построена, аналогично модели Поупа, на базе RSTM LRR [52], однако при ее построении был сделан ряд предположений, позволивших существенно упростить выражения для коэффициентов β_n . Авторы предложили два варианта модели, различающихся уравнениями для вычисления масштабов турбулентности. Первый вариант был построен на основе низкорейнольдсовой k - ϵ модели Чена [77], а второй – на базе низкорейнольдсовой k - ω модели Вилкокса [60].

К сожалению, эта модель также не была свободна от недостатков, основной причиной которых являлись особенности дифференциальных уравнений для масштабов турбулентности. Так, k - ϵ версия обладала всеми недостатками, присущими низкорейнольдсовой модели Чена. В частности, для этой модели крайне трудно получить сошедшееся решение в целом ряде задач, кроме

того в формулировке модели присутствует нелокальная величина u^+ . Эти обстоятельства фактически делают невозможным использование k - ϵ версии модели Валлина-Йохансона в современных кодах.

Вторая версия этой модели, построенная на базе низкорейнольдсовой k - ω модели Вилкокса [60], также унаследовала от базовой модели ряд недостатков. К их числу относятся аномальная чувствительность к граничным условиям для удельной диссипации на свободной границе [78] и недостаточная точность расчета пограничных слоев с положительным градиентом давления [56]. Эти недостатки стимулировали попытки создания новых, более совершенных версий EARSМ WJ на основе моделей Ментера BSL и SST. Несколько попыток были предприняты Хеллстеном [79], [80], однако они оказались не очень успешными, поскольку в процессе калибровки были изменены коэффициенты базовой модели BSL, что привело к снижению точности расчетов.

В настоящей диссертации представлены две модели, построенные на сочетании алгебраической EARSМ Валлина-Йохансона [76] и k - ω моделей Ментера. Первая из них, BSL EARSМ [81] (см. раздел 2.1.1), основана на BSL модели Ментера [56], но в отличие от упомянутой модели Хеллстена [80] ее калибровка не затронула константы базовой модели. Вторая модель, SST NL [82] (см. раздел 2.1.2), по сути, является нелинейной версией модели SST, поскольку в ней к замыкающему соотношению для определения напряжений Рейнольдса оригинальной модели добавлены нелинейные слагаемые модели Валлина-Йохансона. Мотивацией для создания этой модели послужило то, что именно ограничитель SST в выражении для турбулентной вязкости в значительной степени обеспечивает преимущество этой модели при расчете пограничных слоев с градиентом давления.

Модели для учета кривизны линий тока и вращения потока.

Как известно (см., например, [83] - [85]), кривизна линий тока и вращение потока существенно влияют на характеристики турбулентности. Из галилеевой инвариантности следует, что оба эти явления имеют одинаковую природу. Еще Прандтль предложил для течений в криволинейных каналах или между соосными вращающимися дисками (такие течения часто называют «одномерными»), поскольку в них одна ненулевая компонента скорости зависит от одной координаты) безразмерный критерий, характеризующий кривизну линий тока:

$$S = \frac{U}{r} / \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (1.24)$$

Природа столь сильного влияния состоит в том, что центробежная и кориолисова силы, возникающие в сильно закрученных или вращающихся потоках, не только действуют на осредненное течение, но и существенным образом влияют на характеристики турбулентности. Эти силы, в зависимости от течения, повышают или снижают устойчивость течения в целом, что, в

свою очередь, уменьшает или увеличивает интенсивность турбулентных пульсаций. Так, например, в криволинейном канале с отношением высоты к радиусу кривизны $H/R = 1\%$ трение на двух стенках различается на 10%, т.е. изменение характеристик потока за счет влияния кривизны на турбулентность примерно на порядок превосходит изменение за счет непосредственного влияния этих сил на поток [86].

Считается, что RSTM способны предсказать влияние кривизны и вращения на турбулентность, однако на практике эти преимущества реализованы далеко не в полной мере. Связано это с тем, что для точного предсказания рассматриваемых эффектов необходимо их правильным образом учесть при моделировании многочисленных слагаемых, входящих в правую часть уравнений переноса напряжений Рейнольдса (см., например, [87]). Эта задача не менее сложна, чем определение влияния кривизны и вращения на напряжения Рейнольдса, поэтому пути ее решения, существующие в настоящий момент, далеко не совершенны. Да и само использование RSTM для расчета практических задач, как уже было отмечено, связано со значительными трудностями, поэтому их применение для моделирования течений с кривизной и вращением весьма ограничено.

Модели, использующие концепцию турбулентной вязкости, сами по себе не способны «ухватить» влияние кривизны и вращения на характеристики турбулентности, поэтому общепринятым подходом является введение в эти модели специальных поправок. Впервые этот подход был предложен в пионерской работе П. Брэдшоу [88], где автор провел аналогию между центробежной силой и силой плавучести. Опираясь на эту аналогию, Брэдшоу сформулировал безразмерный критерий, характеризующий отношение центробежной силы к конвективным слагаемым, и названный им по аналогии критерием плавучести числом Ричардсона Ri , которое в «одномерном» случае можно выразить через параметр Прандтля.

Предложенное Брэдшоу число Ричардсона или его аналоги долгое время использовались для создания поправок на кривизну линий тока к различным моделям турбулентности (см., например, [89] - [92]). Этот подход, однако, имеет два существенных недостатка. Во-первых, все существующие формулировки числа Ричардсона предложены для решения тех или иных узких классов задач, их тензорно-инвариантное обобщение на произвольный трехмерный случай крайне затруднительно, если вообще возможно. Во-вторых, в рамках этого подхода не принимается во внимание влияние силы Кориолиса на характеристики турбулентности, а это влияние может быть очень существенным.

Ф. Спаларт и М.Л. Шур [93] предложили использовать в поправках на кривизну линий тока и вращение потока два критерия. Первый из них, равен отношению деформации потока к его закрутке

$$r^* = S/\Omega, \quad (1.25)$$

где S и Ω инварианты тензоров скоростей деформаций (1.7) и завихренности (1.8).

Как и турбулентное число Ричардсона, в «одномерном» случае этот критерий можно выразить через параметр Прандтля, поэтому его можно рассматривать как величину, характеризующую степень влияния центробежной силы. Однако, в отличие от предложенных ранее критериев, эта величина является тензорно-инвариантной, что позволяет использовать ее при решении произвольных задач.

Второй критерий базируется на идеях, описанных в [94], и включает в себя скорость поворота главных осей тензора скоростей деформаций, а его формулировка содержит полную производную этого тензора по времени

$$\tilde{r} = 2\Omega_{ik}S_{jk}(DS/Dt)_{ij}/D^4, \quad D^2 = 0.5(S^2 + \Omega^2). \quad (1.26)$$

Как было позднее показано [95] на основе анализа уравнений переноса напряжений Рейнольдса во вращающейся системе координат, именно свертка тензора скоростей деформаций и его полной производной являются мерой воздействия силы Кориолиса на турбулентность.

На основе предложенных критериев авторами [93] была предложена поправка к модели SA [54], состоящая в умножении генерационного члена в уравнении переноса турбулентной вязкости на эмпирическую функцию f_{r1} :

$$f_{r1} = (1 - C_{r3} \arctg(C_{r2} \tilde{r})) 2r^* (1 + C_{r1}) / (1 + r^*) - C_{r1}, \quad C_{r1} = 1, C_{r2} = 12, C_{r3} = 1. \quad (1.27)$$

Эта функция принимает значения $f_{r1} > 1$ в тех областях, где эффекты кривизны и вращения дестабилизируют поток, и значения $f_{r1} < 1$ в областях, где поток стабилизируется, причем в некоторых областях течения она может принимать и отрицательные значения. Дальнейшее тестирование этой поправки (см., например, [96], [97]) показало ее эффективность при расчете различных внутренних и внешних течений. Следует отметить, что на протяжении последних десятилетий предпринимались неоднократные попытки построить упрощенные поправки, не содержащие полной производной от тензора скоростей деформаций (см., например, [98], [99]). Эти поправки не получили широкого распространения, поскольку сделанные упрощения сужают область их применимости по сравнению с поправкой Спаларта-Шура.

Адаптация поправки Спаларта-Шура для модели SST, предложенная в работе [100] (модель SST RC), существенно расширила возможности этой модели. Эта поправка, однако, обладала рядом недостатков, вытекающих из способа ее построения. Авторы поправки использовали оригинальную функцию (1.27) в качестве множителя для генерации в уравнениях переноса кинетической турбулентности k и удельной диссипации ω . Отличие этих уравнений от уравнения

модели SA привело не только к необходимости уменьшения константы модели C_{r2} с 12 до 2, но и введению дополнительных ограничений для функции f_{r1} :

$$f_{r1,MS} = \max \left\{ \min (f_{r1}, 1.25), 0 \right\}. \quad (1.28)$$

Результатом этого стала слабая чувствительность разработанной поправки к скорости вращения, поскольку во многих случаях она принимает предельные значения 0 и 1.25 и не «чувствует» изменение критериев r^* и \tilde{r} . Этот недостаток послужил стимулом к разработке новой поправки для модели SST, представленной в разделе 2.1.3 настоящей диссертации (модель SST RC1 [101]).

Модели для расчета обтекания аэродинамических профилей при условиях близких к срыву потока.

Накопленный к настоящему времени опыт двумерных RANS расчетов [102] - [106] обтекания аэродинамических профилей свидетельствует о том, что при углах атаки, соответствующих безотрывным режимам обтекания, расчет, как правило, хорошо согласуется с экспериментом. Однако, даже при использовании лучших современных полуэмпирических моделей турбулентности наблюдается существенное рассогласование результатов расчета и эксперимента при углах атаки, соответствующих срыву потока на стороне разрежения (ошибка может достигать 25%). Отметим, что именно эти режимы представляют существенный практический интерес для ветроэнергетики и других областей промышленности.

Характерной особенностью этих режимов течения является отрыв турбулентного пограничного слоя от верхней (подветренной) стороны крыла. Многочисленные экспериментальные (см., например, [107] - [109]) и расчетные [110], [111] исследования свидетельствуют о появлении на верхней поверхности трехмерных вихревых ячеек, которые часто называют «грибообразными структурами». Причина их появления состоит в пространственной неустойчивости отрыва от гладкой поверхности, которую можно показать при помощи глобального анализа устойчивости (см., например, [110], [112] - [114] и раздел 5.3.2.3 настоящей диссертации). Однако даже при учете трехмерных структур точность расчета отрывных режимов обтекания остается крайне низкой.

Детальный анализ причин рассогласования расчета и эксперимента, проведенный под руководством автора [115], [116], показал, что основным источником ошибок является неточность полуэмпирических моделей турбулентности, затягивающих появление отрыва на верхней поверхности аэродинамических профилей. В рамках настоящей диссертации в разделе 2.1.4 предложена модификация модели SST, позволяющая существенно повысить точность расчета

обтекания аэродинамических профилей при условиях близких к срыву потока (модель SST HL [117]).

Модели для расчета осесимметричных струйных течений

Проблема обеспечения высокой точности расчета плоских и осесимметричных струй при едином наборе калибровочных констант характерна для многих полуэмпирических моделей турбулентности. Ее причина состоит в том, что в плоских и осесимметричных струях когерентные структуры, в значительной степени определяющие турбулентный перенос импульса, существенно различаются. Как показано в работе [118] для модели Спаларта-Аллмараса [54] эта проблема также весьма актуальна.

Для повышения точности полуэмпирических моделей при расчете течений, характеризующихся значительной поперечной кривизной, был предложен ряд поправок, в той или иной степени решающих эту проблему. К ним, в частности, относятся: поправка, предложенная Вилкоксом [119], гипотеза Поупа [120], основанная на модели растяжения вихрей, и др. Однако наиболее эффективной оказалась поправка, предложенная А.Н. Секундовым в модели v_t -92 [53] и основанная на добавлении в правую часть уравнения переноса турбулентной вязкости слагаемого $C_3 v_t (\Delta v_t + N_2)$, где $N_2 = |\nabla N_1|$, $N_1 = |\nabla v_t|$. В случае плоской струи это слагаемое мало, поскольку $\Delta v_t \approx \partial^2 v_t / \partial y^2$, а $N_2 \approx -\partial^2 v_t / \partial y^2$, однако для круглой струи в окрестности оси симметрии его величина оказывается весьма существенной: $(\Delta v_t + N_2) \approx (\partial v_t / \partial r) / r$ (r – локальный радиус кривизны). Соответствующая калибровка константы C_3 обеспечивает высокую точность расчета как плоской, так и круглой струй.

Однако поправка Секундова имеет ряд недостатков, не позволяющих эффективно использовать ее в рамках модели Спаларта-Аллмараса. В частности, она хоть и мала, но не равна нулю для плоских течений, поэтому ее имплементация ведет к необходимости рекалибровки всей модели и повторения почти тридцатилетней работы по ее тестированию. Кроме того, для расчета дополнительного слагаемого в правой части необходим большой конечно-разностный шаблон, что усложняет ее внедрение в расчетные коды. Это стимулировало разработку новой поправки для моделей с одним уравнением для турбулентной вязкости (модель SA TC), представленной в разделе 2.1.5.

Модели для расчета пограничных слоев при низких числах Рейнольдса

«Проблема низких чисел Рейнольдса», состоящая в существенном занижении расчетного коэффициента трения при $Re_\theta < 5 \cdot 10^3$, хорошо известна начиная с 60х годов прошлого века и характерна практически для всех моделей турбулентности, включая даже самые лучшие (Рис. 10).

Для алгебраических моделей, использующих в своей формулировке параметры пограничного слоя, был предложен целый ряд поправок, исправляющих этот дефект (см., например, [121]), однако эти поправки включают локальное число Рейнольдса Re_θ и неприменимы к современным дифференциальным моделям. В разделе 2.1.6 предложена модификация модели Спаларта-Аллмараса (модель SA Low-Re [122]), существенно повышающая точность расчета пограничных слоев при низких числах Рейнольдса, построенная без использования Re_θ и применимая в современных вычислительных кодах.

1.2. ГИБРИДНЫЕ RANS-LES МЕТОДЫ

1.2.1. DES-ПОДОБНЫЕ МОДЕЛИ

Метод DES был предложен в 1997 г. [23] в качестве альтернативы RANS и LES методам при расчете течений с обширными отрывными зонами. Как отмечалось во Введении, лучшие из RANS моделей турбулентности обеспечивают вполне приемлемую точность расчета присоединенных пограничных слоев, но непригодны для расчета течений с массивным отрывом. В противоположность этому, LES обеспечивает высокую точность расчета отрывных течений, но требует при этом непомерных вычислительных затрат, связанных с необходимостью разрешения мелких вихрей во внутренней области присоединенных пограничных слоев. Исходя из этого, авторы DES предложили объединить сильные стороны RANS и LES в рамках единой модели, то есть построить модель, которая функционировала бы как RANS в присоединенных пограничных слоях и как LES в отрывных областях потока (см. схему на Рис. 11).

Реализация этой идеи оказалась очень простой и базируется на формальном сходстве уравнений RANS и LES (см. Введение). Благодаря этому, одна и та же “базовая” модель турбулентности может работать как RANS модель и как подсеточная модель LES в зависимости от соотношения линейного масштаба турбулентности RANS и подсеточного линейного масштаба LES.

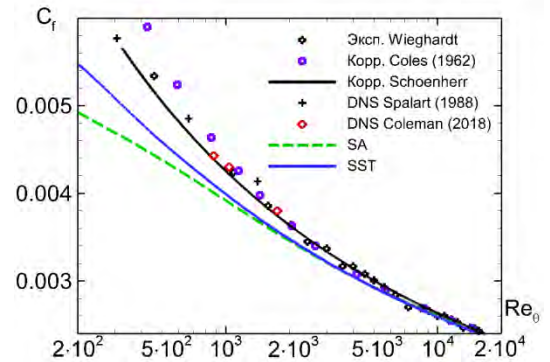


Рис. 10. Сравнение коэффициента трения, рассчитанного с использованием моделей SA и SST, с данными эксперимента и DNS [40], [214], [215], [256], [257].



Рис. 11. Схема, поясняющая функционирование DES при расчете течений с обширным отрывом (Ф. Спаларт, 1997 год).

В первой версии DES [23] в качестве такой базовой модели использовалась модель SA [54], в которой линейным масштабом турбулентности l_{RANS} является ближайшее расстояние от рассматриваемой точки потока до твердой стенки $l_{RANS} = d_w$. При этом для получения соответствующей модели DES в уравнении (1.2) проводится замена этого масштаба на «гибридный» линейный масштаб

$$l_{DES} = \min\{l_{RANS}, C_{DES}\Delta\}, \quad (1.29)$$

где в качестве подсеточного масштаба Δ предложено использовать максимальный локальный шаг сетки ($\Delta = \Delta_{\max} = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$), а калибровка константы C_{DES} выполнена на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности [123].

В период с 2004 по 2010 годы были предложены версии DES на основе ряда других RANS моделей (TNT k - ω модели [124], SST модели [125], EARSM LL k - ε модели [126], v^2 - f модели Durbin [127] и др.). Остановимся подробнее на DES на базе SST модели, развитию которой по большей части посвящена Глава 3 настоящей диссертации.

Реализация идей DES на базе моделей с двумя уравнениями может быть осуществлена различными способами, однако на практике используется наиболее простая из всех возможных формулировок SST DES, предложенная в работах [125], [128] (другие возможные формулировки отличаются формой записи уравнений переноса для k и ω (1.13) через линейный масштаб). В рамках этого подхода диссипативное слагаемое в уравнении для кинетической энергии турбулентности записывается с использованием линейного масштаба турбулентности:

$$\partial \rho k / \partial t + \partial \rho u_k k / \partial x_k = \partial \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \partial k / \partial x_k \right] / \partial x_k + P_k - \beta^* \rho k^{3/2} / l_{RANS}, \quad (1.30)$$

где $l_{RANS} = k^{1/2} / \beta^* \omega$. Уравнения SST DES могут быть получены из (1.30) путем замены линейного масштаба l_{RANS} на l_{DES} (1.29).

Как видно из соотношения (1.29), программная реализации DES исключительно проста (для этого требуется изменить лишь несколько строк любого CFD кода, предназначенного для решения уравнений RANS). Данное обстоятельство, а также впечатляющие первые результаты DES (см., например, работы [123], [128], [129]) привели к его быстрому внедрению в различных академических и коммерческих CFD кодах и к широкому использованию при решении различных прикладных задач, связанных с расчетом отрывных течений (течения в выемках и кавернах [130] - [132]; обтекание автомобилей [133] - [137], шасси самолетов [138], ракет [139], [140] и механизированных крыльев [141]; течений с активным управлением отрывом пограничного слоя [142], [143] и области сочленения крыла и фюзеляжа самолета [144] и т. д.). Различные примеры при-

менения DES можно найти также в многочисленных обзорах, посвященных гибридным подходам (см., например, [145], [146]). В результате столь активного использования, наряду с важными достоинствами DES, были выявлены и некоторые его недостатки.

Первый из них состоит в том, что при уменьшении шагов расчетной сетки в тангенциальных к обтекаемой поверхности направлениях ниже некоторого предела ($\Delta < l_{RANS}/C_{DES}$) переключение метода DES в LES моду происходит внутри присоединенного пограничного слоя. Это противоречит концепции DES (весь присоединенный пограничный слой должен находиться в RANS области), что влечет за собой занижение моделируемых напряжений в окрестности RANS-LES интерфейса, которое не компенсируется напряжениями, разрешаемыми в этой области. Данный дефект DES, который отмечался уже в оригинальной статье [23], получил впоследствии название «истощение модельных напряжений» (*Modeled-Stress Depletion*, или *MSD* [147]). Он является одним из проявлений общей для HRLM проблемы «серой области» и приводит к появлению двух сдвинутых друг относительно друга логарифмических участков в профиле скорости (*Log Layer Mismatch* - *LLM* [145]), занижению трения на стенке или даже к возникновению ложного отрыва потока (*Grid-Induced Separation* - *GIS*, Рис. 12) [148].

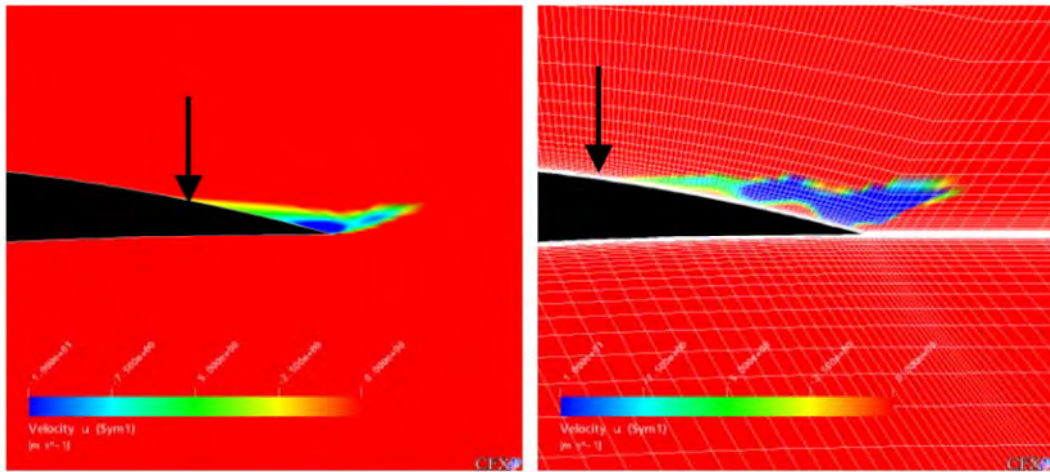


Рис. 12. Отрыв потока, вызванный измельчением сетки (из [148]).

Для устранения данного недостатка в работах [148], [149] была предложена соответствующая модификация DES, получившая название «задержанный» метод DES (*Delayed DES*, или *DDES*). В рамках этой модификации соотношение (1.29) для гибридного линейного масштаба заменяется соотношением

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max\{0, (l_{RANS} - C_{DES} \Delta)\}. \quad (1.31)$$

Функция f_d [149] в (1.31) является эмпирической и в идеале обеспечивает работу DES в режиме RANS во всем присоединенном пограничном слое независимо от используемой вычислительной сетки⁵:

$$f_d = 1 - \tanh \left[(C_{d1} r_d)^{C_{d2}} \right], r_d = (v_t + \nu) / \left(\kappa^2 d_w^2 \sqrt{0.5 \cdot (S^2 + \Omega^2)} \right). \quad (1.32)$$

Здесь S и Ω определяются выражениями (1.7) и (1.8), $\kappa = 0.41$ – константа Кармана, d_w – расстояние до ближайшей твердой стенки, а ν и ν_t – молекулярная и турбулентная кинематические вязкости, соответственно. Базируясь на результатах расчетов турбулентного пограничного слоя на плоской пластине на очень подробных стеках (максимальный шаг сетки составлял около 1/10 толщины пограничного слоя) авторы метода выбрали значения констант $C_{d1} = 8$ и $C_{d2} = 3$ для SA DDES [149]. Однако, в силу различия моделей SA и SST, профили параметра r_d в пограничном слое различаются, что приводит к необходимости рекалибровки констант C_{d1} и C_{d2} . Результаты этой рекалибровки, представленной в рамках настоящей диссертации, приведены в разделе 3.1.1.

Еще одним недостатком, присущим как DES и DDES, так и другим HRLM, а также «чистому» LES при представляющих практический интерес высоких значениях числа Рейнольдса, является задержка формирования трехмерных структур в оторвавшихся слоях смешения. При таких числах Рейнольдса присоединенный пограничный слой вверх по потоку от отрыва является турбулентным, вследствие чего оторвавшийся слой смешения также оказывается турбулентным и населенным достаточно мелкими трехмерными вихрями непосредственно после отрыва. Однако, при использовании DES-подобных гибридных подходов пристеночный слой описывается с помощью RANS, то есть не содержит разрешенных турбулентных структур и характеризуется высоким уровнем турбулентной вязкости. Ее конвекция вниз по потоку (в LES подобласть), а также интенсивная генерация «подсеточной» вязкости в LES подобласти на начальном участке оторвавшегося слоя смешения, связанная с сильной анизотропией расчетных сеток типичной для этой области и с большим градиентом скорости, приводят к высоким уровням подсеточных напряжений. В результате, несмотря на формальное переключение метода в LES моду, на начальном участке оторвавшегося слоя смешения отсутствуют разрешенные турбулентные структуры, а процесс их формирования развивается по сценарию, который внешне напоминает сценарий перехода к турбулентности в ламинарном слое смешения вследствие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (*pseudo laminar-turbulent transition*, [150]). На протяжении этой псевдо-переходной

⁵ Следует отметить, однако, что на практике это достигается лишь при измельчении сетки до определенного предела, так что проблему MSD нельзя считать полностью решенной.

области полные турбулентные напряжения оказываются заниженными, поскольку модельные напряжения уже уменьшились за счет активации подсеточной модели, а разрешенные турбулентные структуры еще не сформировались. Таким образом, задержка формирования трехмерных структур в оторвавшихся слоях смешения является одним из проявлений упомянутой выше проблемы «серой области». В результате этой задержки, в расчетах отрывных и струйных течений с помощью DES-подобных HRLM наблюдаются более или менее протяженные переходные области, наличие которых снижает точность предсказания характеристик потока не только в самом слое смешения, но во всем течении (см., например, работы [136], [139], [151] - [154]).

Одним из путей сокращения протяженности области RANS-LES перехода является использование в слоях смешения мелких (почти изотропных) расчетных сеток. Однако, для того, чтобы добиться хорошего согласования с экспериментом таким способом, требуется очень сильное измельчение сетки. В качестве примера на Рис. 13 сравниваются мгновенные поля кинетической энергии турбулентности в истекающей из сопла струе, полученные в работе [154] с использованием метода DDES на двух сетках. При этом правильное решение, воспроизводящее наблюдаемый в эксперименте быстрый переход к развитой турбулентности в слоях смешения струи (нижняя часть рисунка), было получено только на очень мелкой сетке с числом узлов в азимутальном направлении около 3000 и общим числом ячеек около 70 миллионов. Следует отметить, что в работе [155] авторам удавалось добиться такого же результата на сетке, содержащей на порядок меньше узлов в азимутальном направлении, путем использования зонного метода, в котором в течение в сопле, как и в методе DDES, описывается в рамках RANS, а при расчете струи подсеточная вязкость принимается равной нулю. Таким образом, сокращение длины области RANS-LES перехода в слоях смешения путем измельчения расчетной сетки на их начальном участке является крайне дорогостоящим и, по сути, неприемлемым для практики способом решения данной проблемы.

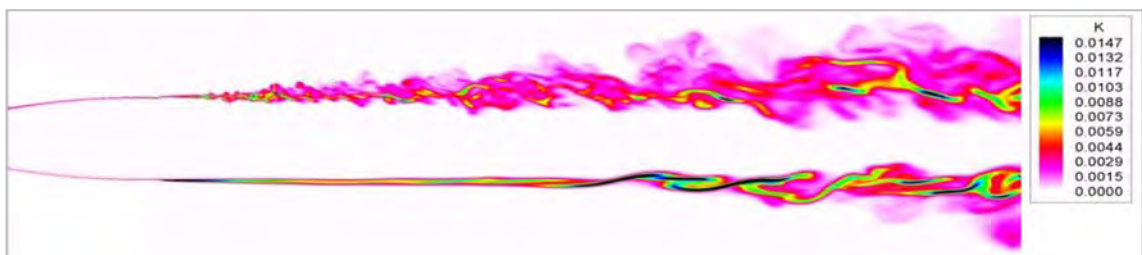


Рис. 13. Поле кинетической энергии турбулентности в круглой струе, полученное методом DDES на мелкой и грубой сетках (из [154]).

В связи с этим поиску альтернативных путей ее решения было посвящено большое количество исследований (см. например, работы [156] - [162]). Наиболее эффективными из них представляются два подхода для DDES на основе модели турбулентности SA, предложенные недавно

в [162] и базирующиеся на использовании альтернативного дифференциального оператора в подсеточной версии SA модели и на модификации подсеточного масштаба. В связи с этим остановимся на этих подходах подробнее.

Дифференциальные подсеточные модели, используемые в методах семейства DES, в равновесии (т.е. при равенстве генерации и диссипации турбулентных характеристик потока) переходят в алгебраическую подсеточную модель Смагоринского $\nu_t = (C_s \Delta)^2 S$ [7], согласно которой подсеточная вязкость пропорциональна инварианту тензора скоростей деформации S и, в результате, оказывается отличной от нуля в двумерных областях течения. Более того, на начальных участках слоев смешения подсеточная вязкость, рассчитанная по модели Смагоринского, и, следовательно, с помощью вышеупомянутых дифференциальных подсеточных моделей, оказывается весьма высокой, что является одной из причин затягивания развития турбулентных структур в слое смешения. Следует отметить, что в настоящее время существуют и другие алгебраические подсеточные модели, согласно которым подсеточная вязкость в двумерном сдвиговом течении равна нулю. К их числу относятся так называемые модели WALE [163], σ [164], а также некоторые другие подсеточные модели (например, [165], [166]). Таким образом, проблема затягивания перехода от RANS к LES в слоях смешения может быть, по крайней мере, частично решена путем использования такой дифференциальной подсеточной модели для метода DES, которая в равновесии переходила бы не в модель Смагоринского, а в какую-либо из перечисленных алгебраических подсеточных моделей.

Впервые эта идея была реализована в работе в [162], авторы которой предложили две модификации метода DDES, построенного на SA модели. Суть этих модификаций заключается в замене инварианта градиента скорости S в формулировке подсеточной версии модели SA дифференциальным оператором модели σ или WALE. Для того, чтобы обеспечить модификацию модели только в LES области, в уравнении SA DDES подхода в генерационном слагаемом (1.3) вместо Ω (1.8) используется выражение

$$S_{\sigma/WALE-DDES} = \Omega - f_d \cdot \theta(L_{RANS} - L_{LES}) \cdot (\Omega - B_{\sigma/WALE} S_{\sigma/WALE}), \quad (1.33)$$

где f_d – «защитная» функция DDES, $L_{RANS} = d_w$, $L_{LES} = C_{DES} \Delta$, $S_{\sigma/WALE}$ – дифференциальный оператор σ - или WALE- модели, $B_{\sigma/WALE}$ – эмпирическая константа соответствующей модели, а $\theta(a)$ – функция Хевисайда, определяемая как

$$\theta(a) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \leq 0 \\ 1, & \text{при } a > 0 \end{cases}. \quad (1.34)$$

Результаты расчетов плоского слоя смешения, представленные в [162], показали эффективность такого подхода, причем σ -модификация оказалась несколько эффективнее WALE-

модификации (Рис. 14). Это связано с тем, что оператор σ -модели, в отличие от оператора WALE модели, близок к нулю не только в областях чистого сдвига, но и в областях твердого вращения, что обеспечивает снижение подсеточной вязкости в двумерных вихрях, формирующихся при сворачивании слоя смешения. Таким образом, из двух предложенных модификаций σ -DDES модель является более эффективной для ускорения RANS-LES перехода в оторвавшихся слоях смешения.

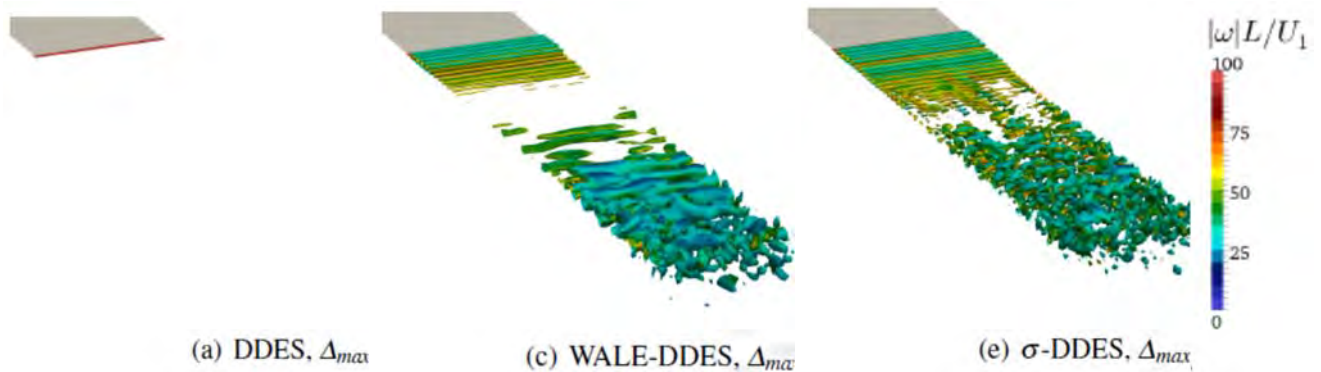


Рис. 14. Изоповерхности Q -критерия, полученные с помощью стандартного DDES подхода и двух его модифицированных версий – WALE-DDES и σ -DDES (из [162]).

Второй из упомянутых выше подходов к решению проблемы затягивания перехода от RANS к LES в слоях смешения, предложенный в [162], состоит в модификации определения подсеточного масштаба, используемого в DES-подобных моделях. Он основан на следующих соображениях.

Хорошо известно, что в LES (в том числе, и в LES подобласти HRLM) предпочтительным является использование сеток с изотропными ячейками [167]. Однако, для удовлетворения этому требованию в некоторых областях потока, в частности, на начальных участках слоев смешения (см. обсуждавшийся выше пример на Рис. 13), требуется сильное увеличение размеров сетки. Поэтому на практике в слоях смешения используются существенно анизотропные сетки, для которых традиционное определение линейного подсеточного масштаба, используемого в DES-подобных подходах $\Delta_{max} = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ [23], является, строго говоря несправедливым. Например, на начальном участке слоев смешения турбулентные вихри являются практически двумерными, поэтому размер разрешаемых вихревых структур определяется шагами сетки в плоскости течения. При этом максимальным является шаг сетки в трансверсальном направлении, причем его величина, как правило, сильно превышает размер шагов в других направлениях. Таким образом, использование этого определения приводит к неоправданному завышению линейного подсеточного масштаба, а, следовательно, и подсеточной вязкости, что, в свою очередь, влечет за собой замедлению формирования трехмерных турбулентных структур.

С учетом этих соображений в работе [162] было предложено следующее определение подсеточного масштаба:

$$\tilde{\Delta}_\omega = \max_{n,m=1,8} \left| (\bar{\mathbf{I}}_n - \bar{\mathbf{I}}_m) \right| / \sqrt{3}, \quad (1.35)$$

где $\bar{\mathbf{I}}_n = \bar{\mathbf{n}}_\omega \times \bar{\mathbf{r}}_n$, $\bar{\mathbf{n}}_\omega$ - единичный вектор, сонаправленный с вектором завихренности потока, а $\bar{\mathbf{r}}_n$ - радиус-вектор n -ого узла ячейки.

На начальном (квазидвумерном) участке плоского слоя смешения, распространяющегося для определенности в плоскости XY , величина масштаба $\tilde{\Delta}_\omega$ имеет порядок $O(\max\{\Delta x, \Delta y\})$, то есть оказывается намного меньше максимального шага в трансверсальном направлении Δz , и не зависит от минимального шага сетки (оба этих шага не характеризуют размер наиболее мелких разрешаемых на сетке вихрей). В то же время, в областях потока с развитой трехмерной турбулентностью $\Delta \approx \Delta_{\max}$, а в областях с изотропными сетками эта величина совпадает с традиционным для LES определением $\Delta = \sqrt[3]{Vol}$, где Vol означает объем ячейки.

Однако, как показано в [162], одной замены стандартного для DES подсеточного масштаба Δ_{\max} на модифицированный масштаб $\tilde{\Delta}_\omega$ недостаточно для полного решения проблемы затянутого RANS-LES перехода. Несмотря на обеспечиваемое в результате значительное уменьшение уровня подсеточной вязкости на начальных участках слоев смешения, он остается достаточно высоким из-за больших градиентов скорости и конвективного переноса турбулентных характеристик из RANS в LES-подобласть. Таким образом, для снижения турбулентной вязкости на начальных участках слоев смешения требуются дополнительные меры. Два разных решения этой проблемы были предложены в работах [162] и [168]. Первое из них [162] состоит в использовании масштаба $\tilde{\Delta}_\omega$ в сочетании с σ -DDES моделью, а второе [168] - во введении в определение подсеточного масштаба (1.35) дополнительной эмпирической функции F_{KH} (*Kelvin-Helmholtz, KH*), предназначенной для дополнительного уменьшения подсеточной вязкости, необходимого для разблокировки неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в квазидвумерных областях потока. Полученное в результате новое соотношение для подсеточного масштаба имеет вид:

$$\Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH} \quad (1.36)$$

где индекс SLA (*Shear-Layer-Adapted*) означает «адаптированный к слоям смешения», а аргументом функции F_{KH} является кинематический критерий VTM (*Vortex Tilting Measure*), позволяющий идентифицировать квазидвумерные области течения:

$$VTM \equiv \sqrt{2} |(\mathbf{S} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) \times \bar{\boldsymbol{\omega}}| / (|\bar{\boldsymbol{\omega}}|^2 \sqrt{\Pi_s}). \quad (1.37)$$

Здесь \mathbf{S} - тензор скоростей деформаций (1.9), II_S – его инвариант (1.22), а $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{V})$ – вектор завихренности.

В областях с развитой трехмерной турбулентностью осредненное по соседним ячейкам значение величины VTM (она обозначена $\langle \text{VTM} \rangle$) лежит в диапазоне примерно от 0.3 до 1, а в квазидвумерных областях потока оно близко к нулю, что позволяет однозначно идентифицировать последние.

Эмпирическая функция $F_{KH}(\langle \text{VTM} \rangle)$, предложенная в [168], определена следующим образом

$$F_{KH}(\langle \text{VTM} \rangle) = \max \left\{ F_{KH}^{\min}, \min \left\{ F_{KH}^{\max}, F_{KH}^{\min} + (F_{KH}^{\max} - F_{KH}^{\min}) (\langle \text{VTM} \rangle - a_1) / (a_2 - a_1) \right\} \right\}, \quad (1.38)$$

где эмпирические константы имеют значения: $a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.3$, $F_{KH}^{\min} = 0.1$, $F_{KH}^{\max} = 1.0$. Эта функция обеспечивает десятикратное уменьшение подсеточного масштаба на начальных участках оторвавшихся слоев смешения, в результате чего в этой области многократно (примерно на два порядка) уменьшается подсеточная вязкость и, соответственно, значительно ускоряется процесс формирования трехмерных структур в квазидвумерных областях потока.

Для деактивации F_{KH} внутри присоединенных пограничных слоев, где должна работать RANS ветвь метода DDES, в [168] предлагается использовать следующее ограничение:

$$F_{KH}^{\text{lim}} = \begin{cases} 1.0, & \text{при } f_d < (1 - \varepsilon) \\ F_{KH}, & \text{при } f_d \geq (1 - \varepsilon) \end{cases}, \quad \varepsilon = 0.01. \quad (1.39)$$

Окончательное определение подсеточного линейного масштаба турбулентности, адаптированного к слоям смешения, имеет вид:

$$\Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_{\omega} F_{KH}^{\text{lim}}(\langle \text{VTM} \rangle). \quad (1.40)$$

Результаты расчетов турбулентной струи (Рис. 15) методом SA DDES и его модификациями (1.35) и (1.40), представленные в [168], наглядно демонстрируют указанное преимущество масштаба Δ_{SLA} не только перед стандартным масштабом Δ_{\max} , но и перед модифицированным масштабом $\tilde{\Delta}_{\omega}$.

Таким образом, можно констатировать, что среди предложенных в последние годы методов ускорения RANS-LES перехода в оторвавшихся слоях смешения наиболее эффективными являются σ -модификация метода DDES в сочетании с подсеточным масштабом $\tilde{\Delta}_{\omega}$ и DDES в сочетании с подсеточным масштабом Δ_{SLA} . Оба этих метода позволяют ускорить RANS-LES переход в слоях смешения, имеют локальную формулировку, а дополнительные временные затраты при их использовании намного меньше общего времени расчета. Эти методы были предложены и

апробированы авторами в сочетании с DDES на базе модели турбулентности SA. В настоящей диссертации предлагается их обобщение для применения совместно с SST DDES (раздел 3.1.2).

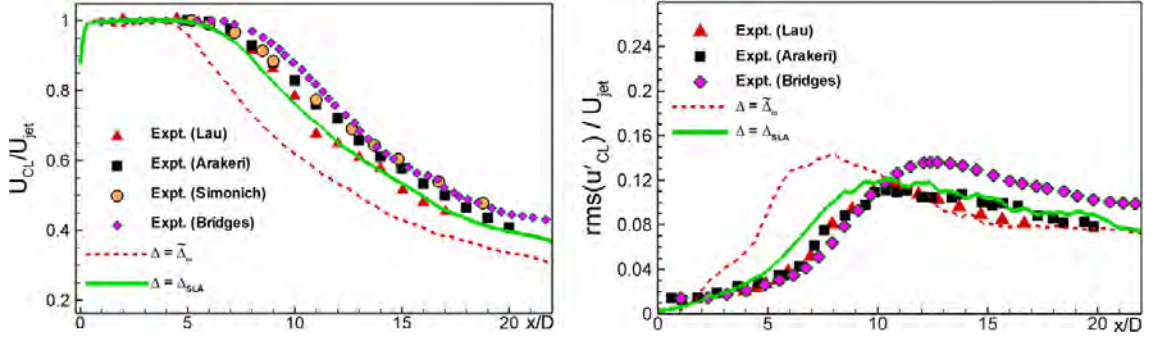


Рис. 15. Сравнение распределений средней скорости (слева) и пульсаций скорости (справа) вдоль оси струи, полученных методом DES в сочетании с масштабами $\tilde{\Delta}_w$ и Δ_{SLA} , с экспериментальными данными [169] - [172] (из [168]).

Завершая анализ DES-подобных моделей, следует остановиться на модификации DDES, предложенной в работе [173] и названной ее авторами «улучшенный DDES» (Improved DDES или IDDES). В отличие от DDES, модель IDDES предназначена не для обеспечения правильного функционирования оригинальной версии DES, а для расширения области ее применения. В частности, при выполнении определенных условий IDDES позволяет проводить расчеты не только отрывных течений, но и присоединенных пограничных слоев, то есть делает его пригодным для LES с пристеночным моделированием (WMLES). Это достигнуто за счет объединения DDES с другой гибридной RANS-LES моделью, предназначенной для WMLES, а выбор той или иной его ветви зависит от того, имеется ли «турбулентный контент» (разрешенные турбулентные пульсации) в пристеночном пограничном слое. Как и методы DES и DDES, IDDES базируется на использовании единой «базовой» RANS модели и замене линейного масштаба l_{RANS} гибридным линейным масштабом, однако выражение для этого масштаба существенно отличается от аналогичных выражений для DES и DDES:

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d (1 + f_e) l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) C_{DES} \Delta_{IDDES}, \quad (1.41)$$

где \tilde{f}_d и f_e - эмпирические функции ($\tilde{f}_d \in [0, 1]$, $f_e \geq 0$), а Δ_{IDDES} - подсеточный масштаб, определяемый выражением

$$\Delta_{IDDES} = \min \left[\max (C_w d_w, C_w \Delta_{max}, \Delta_{wn}), \Delta_{max} \right]. \quad (1.42)$$

Здесь Δ_{max} и Δ_{wn} - максимальный шаг сетки и шаг сетки в направлении нормали к обтекаемой поверхности в рассматриваемой точке, соответственно, а $C_w = 0.15$ - эмпирическая константа. Как показано в [173], такое определение Δ_{IDDES} позволяет использовать одно и то же

значение эмпирической константы C_{DES} при проведении LES как свободных, так и пристеночных течений. Это обстоятельство является крайне важным для IDDES, поскольку данная модель должна функционировать в режиме LES не только вдали от обтекаемой поверхности, но и в непосредственной ее близости.

Эмпирические функции \tilde{f}_d и f_e предназначены для координации работы RANS и LES ветвей IDDES и построены таким образом, чтобы при расчете пристеночных течений модель работала следующим образом. Если в присоединенной части рассматриваемого течения по тем или иным причинам имеются нестационарные турбулентные вихревые структуры, то IDDES должен функционировать как LES с пристеночным моделированием (WMLES), то есть как RANS в пристеночной области пограничного слоя и как LES в его остальной части. В противном случае IDDES должен функционировать как DDES, то есть как RANS в присоединенных пограничных слоях и как LES в отрывных областях потока. В работе [173] были предложены функции \tilde{f}_d и f_e , обеспечивающие выполнение сформулированных требований. Функция \tilde{f}_d определяется как:

$$\tilde{f}_d = \max\{(1 - f_{dt}), f_B\}, \quad (1.43)$$

где

$$f_{dt} = 1 - \tanh\left[(C_{d1} r_{dt})^{C_{d2}}\right], \quad (1.44)$$

$$r_{dt} = v_t / \left(\kappa^2 d_w^2 \max\left\{ \left[0.5(S^2 + \Omega^2) \right]^{1/2}, 10^{-10} \right\} \right), \quad (1.45)$$

$$f_B = \min\{2 \exp(-9\alpha^2), 1\}, \quad \alpha = 0.25 - d_w / \Delta_{\max}. \quad (1.46)$$

Функции f_{dt} и r_{dt} по своему назначению и форме аналогичны функциям f_d и r_d (1.32) в методе DDES и отличаются от них только тем, что вместо суммы молекулярной и турбулентной вязкостей в них входит турбулентная вязкость. Функция f_B становится активной ($\tilde{f}_d = f_B$) только при работе IDDES в режиме WMLES и отвечает за переключение метода в RANS моду в непосредственной окрестности стенки, когда сетка становится недостаточной для качественного LES расчета (Рис. 16).

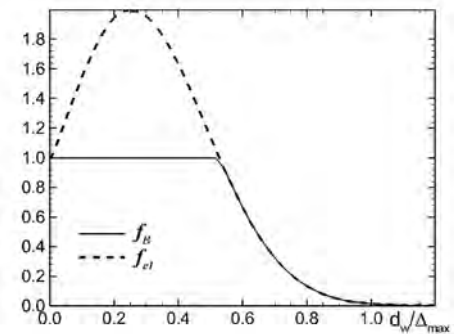


Рис. 16. Графики функций f_B и f_{e1} (из [173]).

Функция f_e в (1.43), как и f_b , активна только при работе IDDES в режиме WMLES и обеспечивает при этом компенсацию обусловленного работой RANS модели в “нестандартных” (нестационарных) условиях снижения уровня модельных напряжений в RANS области вблизи ее границы с LES областью. Выражение для этой функции имеет вид:

$$f_e = \max(f_{e1} - 1, 0)f_{e2}, \quad (1.47)$$

где $f_{e1} = 2 \exp(-A_{e1}\alpha^2)$, $A_{e1} = 10 + \text{sign}(\alpha)$ (график f_{e1} показан штриховой линией на Рис. 16), а

$$f_{e2} = 1 - \max(f_t, f_l), \quad f_l = \tanh\left[\left(c_l^2 r_{dl}\right)^{10}\right], \quad f_t = \tanh\left[\left(c_t^2 r_{dt}\right)^3\right]. \quad (1.48)$$

Величина r_{dl} в (1.46) представляет собой “ламинарный” аналог величины r_d

$$r_{dl} = \nu / \left(\kappa^2 d_w^2 \max\left\{ \left[0.5(S^2 + \Omega^2) \right]^{1/2}, 10^{-10} \right\} \right), \quad (1.49)$$

а эмпирические константы, входящие в (1.48), равны $c_l = 3.55$ и $c_t = 1.63$ для SA DDES и $c_l = 5.0$ и $c_t = 1.87$ для SST DDES.

Выполненные автором исследования [174] показали, что предложенная в работе [173] версия SST IDDES не является оптимальной и может быть улучшена. Предлагаемые улучшения, состоящие в рекалибровке констант функции f_{dt} и упрощении формулировки метода, представлены в разделе 3.1.1.

1.2.2. Зонные RANS-LES МОДЕЛИ

Как уже было сказано во Введении, наиболее общей формой зонных гибридных подходов является встроенный LES (*Embedded LES*). В рамках этого подхода вычислительно трудоемкий метод LES используется только в тех областях потока, которые не поддаются удовлетворительному описанию в рамках RANS или где требуется получение информации о пульсационных характеристиках течения. При этом в RANS и LES подобластях могут использоваться любые модели, а на их границах необходимо поставить условия, обеспечивающие «обмен» информацией о турбулентных характеристиках. Задание таких условий на границах, в которых поток направлен из LES в RANS подобласть, не представляет принципиальных трудностей, поскольку в этом случае информации об осредненных и турбулентных характеристиках потока, доступная на границе LES подобласти, может использоваться для задания необходимых условий на границе RANS подобласти. В результате, основной задачей в данном случае является извлечение этой информации из LES решения. Решение этой задачи было предложено в работе [175] и в дальнейшем развито в [176] - [179]. Таким образом, проблему перехода из LES подобласти в лежащую от нее вниз по потоку RANS подобласть в настоящее время можно считать решенной.

Более серьезной проблемой является «сшивка» RANS и LES подобластей на тех границах, на которых поток направлен из RANS подобласти в лежащую вниз по потоку LES подобласть. Это связано с принципиально разным способом описания турбулентности в рамках RANS и LES подходов. В частности, в RANS решении содержится информация только об осредненных характеристиках турбулентности, в то время как на входной границе LES необходимо задание нестационарных пульсационных характеристик (в противном случае, в ней возникает переходная зона, в которой точность расчета значительно снижается⁶). Это может быть сделано только на базе тех или иных приближенных предположений, от обоснованности которых зависит продолжительность процесса релаксации искусственно созданных пульсаций к «истинной» турбулентности, т.е. протяженность переходной зоны. Как отмечалось во введении, наряду с этой принципиальной проблемой, при программной реализации условий на границе перехода от RANS к LES возникают серьезные технические проблемы, поскольку она существенным образом опирается на такие особенности используемого кода как тип расчетной сетки и способ хранения данных. В результате, некоторые эффективные методы, ориентированные на один код, оказываются неприменимыми в других кодах или требуют их кардинальной переработки.

Исследования, направленные на построение методов перехода от RANS к LES зонных HRLM, были начаты в нулевых годах текущего века и продолжаются вплоть до настоящего времени. В результате, в литературе представлен довольно широкий спектр таких методов (см., например, обзор [180]). Эти методы включают использование предварительных DNS или LES расчетов [181] - [183], «рецикл» турбулентности [181], [184] - [186] и добавление к реальной геометрии обтекаемой поверхности специальных турбулизирующих устройств, имитирующих устройства, применяемые в экспериментах для обеспечения быстрого перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения. Однако наиболее распространение получили методы, основанные на создании на входе в LES подобласть искусственной («синтетической») турбулентности (*Synthetic Turbulence Generator - STG*), статистические характеристики которой определяются из RANS решения на RANS-LES интерфейсе (см. обзорные работы [24], [187] - [190]).

Весьма успешными оказались, в частности, STG, базирующиеся на работе Крейчнана [191], предложившего использовать для создания синтетической турбулентности суперпозицию пространственно-временных Фурье мод со случайными амплитудами и фазами. Реализация и развитие этой идеи в работах [192] - [194] привели к созданию STG, позволяющих сократить длину переходного от RANS к LES участка (его принято называть длиной релаксации), оцениваемую

⁶ Эта проблема по сути идентична проблеме «серой области» в незонных подходах, подробно обсуждавшейся в разделе 1.2.1.

по коэффициенту трения, до 2-4 толщин пограничного слоя. В настоящее время лучшим генератором, основанным на идее суперпозиции мод, является, по-видимому, NTS STG, исходная (чисто аэродинамическая) версия которого предложена в работе [194], а адаптированная к решению задач аэроакустики версия – в работе [180]. В этом генераторе сочетаются лучшие черты предыдущих STG [192], [193], [195] и [196] и, наряду с этим, решены проблемы некоррелированности и учета анизотропии турбулентных вихревых структур в пограничном слое.

В рамках генератора синтетической турбулентности NTS STG⁷ вектор турбулентных пульсаций \bar{u}' на входной границе LES подобласти определяется следующим образом:

$$\bar{u}'(\bar{\mathbf{r}}, t) = 2\sqrt{k} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} \left[\bar{\boldsymbol{\sigma}}^n \cos(\bar{\mathbf{d}}^n \cdot \tilde{k}^n \bar{\mathbf{r}}' + \varphi^n) \right]. \quad (1.50)$$

Здесь N - число мод, \tilde{k}^n - амплитуда вектора волнового числа моды n , $\bar{\mathbf{d}}^n$ - единичный вектор со случайным направлением, равномерно распределенным по сфере; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^n$ - единичный вектор нормальный к вектору $\bar{\mathbf{d}}^n$ ($\bar{\mathbf{d}}^n \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^n = 0$) [191], направление которого в плоскости, нормальной к $\bar{\mathbf{d}}^n$, определяется случайным углом, равномерно распределенным в интервале $[0, 2\pi)$, φ_n - фаза моды n , которая также является случайным числом, равномерно распределенным в интервале $[0, 2\pi)$. Нормализованная амплитуда мод q^n определяется как

$$q^n = E(\tilde{k}^n) \Delta \tilde{k}^n / \sum_{n=1}^N E(\tilde{k}^n) \Delta \tilde{k}^n, \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1, \quad (1.51)$$

где $E(\tilde{k})$ – модифицированный спектр Кармана

$$E(\tilde{k}) = (\tilde{k} / \tilde{k}_e)^4 / \left[1 + 2.4 (\tilde{k} / \tilde{k}_e)^2 \right]^{17/6} \cdot f_\eta f_{cut}. \quad (1.52)$$

Эмпирические функции f_η и f_{cut} введены в это выражение для того, чтобы обеспечить демпфирование спектра в окрестности волновых чисел, соответствующих колмогоровскому линейному масштабу $\tilde{k}_\eta = 2\pi / (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$ и ограничению Найквиста \tilde{k}_{cut} [197]. Эти функции имеют следующий вид

⁷ Ниже приведена использовавшаяся в диссертации изотропная версия генератора, для которого входными данными являются пространственные распределения кинетической энергии турбулентности k и удельной диссипации ω , полученные из SST RANS решения. При этом предполагается, что нормальные компоненты тензора напряжений Рейнольдса одинаковы и равны $2/3k$.

$$f_{\eta} = \exp\left[-\left(12\tilde{k} / \tilde{k}_{\eta}\right)^2\right]. \quad (1.53)$$

$$f_{\text{cut}} = \exp\left(-\left[4 \max(\tilde{k} - 0.9\tilde{k}_{\text{cut}}, 0) / \tilde{k}_{\text{cut}}\right]^3\right), \quad (1.54)$$

где $\tilde{k}_{\text{cut}} = 2\pi / \left(2 \min\left\{\left[\max(\Delta_y, \Delta_z, 0.3\Delta_{\text{max}}) + 0.1d_w\right], \Delta_{\text{max}}\right\}\right)$, Δ_y и Δ_z - локальные шаги сетки в области RANS-LES интерфейса, а Δ_{max} - максимальное расстояние от центра рассматриваемой ячейки до центров соседних ячеек.

Волновое число $\tilde{k}_e = 2\pi / l_e$ соответствует максимуму спектра в рассматриваемой точке, величина линейного масштаба

$$l_e = \min(2d_w, C_l \cdot L_t) \quad (1.55)$$

определяется через расстояние до ближайшей стенки d_w и максимальный масштаб турбулентности

$$L_t = \max(k^{1/2} / \beta^* \omega), \quad (1.56)$$

а значение константы C_l равно 3.

Набор волновых чисел является единым для всех точек и задается по закону убывающей геометрической прогрессии:

$$\tilde{k}^n = \tilde{k}^{\text{max}} \beta^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \beta = 0.9 - 0.99 \quad (1.57)$$

Здесь $\tilde{k}^{\text{max}} = \max_{STG}(\tilde{k}_{\text{cut}})$ - максимальное волновое число в наборе, зависящее только от размеров сетки, а количество чисел берется достаточным для разрешения самых крупных из возможных структур. Следует отметить, что избыточное количество волновых чисел \tilde{k}^n не увеличивает время расчета, поскольку в (1.50) учитываются только те моды, которые вносят существенный вклад в $u'_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$ (чья нормализованная амплитуда q^n больше заранее выбранной величины ϵ).

Зависимость синтетических пульсаций скорости $u'_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$ от времени задается через вектор $\vec{\mathbf{r}}'$ следующим образом⁸:

$$\tilde{k}^n \mathbf{r}' = \{\tilde{k}^n x', \tilde{k}^n y', \tilde{k}^n z'\}, \quad \tilde{k}^n x' = 2\pi(x - U_0 t) / l_e^{\text{max}}, \quad \tilde{k}^n y' = \tilde{k}^n y, \quad \tilde{k}^n z' = \tilde{k}^n z, \quad (1.58)$$

⁸ Здесь предполагается, что направление потока совпадает с осью x .

где U_0 и l_e^{\max} - максимальные значения скорости и линейного масштаба в области работы STG. Для того чтобы избежать погрешности, вызванной изменением масштабов при больших расчетных временах, величина $\tilde{k}^n x'$ вычисляется по следующей рекуррентной формуле через приращение:

$$\tilde{k}^n \cdot x'(t) \approx \tilde{k}^n \cdot x'(t - \Delta t) - 2\pi U_0(t) \cdot \Delta t / l_e^{\max}(t), \quad \tilde{k}^n x'(0) = 2\pi x / l_e^{\max}(0). \quad (1.59)$$

Конкретный способ применения генераторов синтетической турбулентности зависит от способа реализации встроенного LES, а именно от процедуры “сшивки” решений в RANS и LES подобластях расчетной области. Эти процедуры можно разделить на две большие группы, базирующиеся на двухстадийном и одностадийном подходах, соответственно (Рис. 17).

В рамках двухстадийных процедур (Рис. 17) на первом этапе проводится RANS расчет всего рассматриваемого течения, а на втором этапе – только LES расчет в соответствующей подобласти (см., например, [198]). При этом в качестве граничного условия для скорости на входной границе LES задается скорость в соответствующем сечении из уже известного (полученного на первом этапе) RANS решения, к которой добавляются синтетические флуктуации. При расчете сжимаемых течений температура на интерфейсе обычно полагается равной температуре, известной из RANS решения, но иногда к ней тоже добавляются турбулентные температурные флуктуации [199]. Наконец, граничные условия на входе в LES подобласть для давления зависят от локального числа Маха потока: в сверхзвуковых потоках давление на интерфейсе полагается равным давлению из известного RANS решения, а в дозвуковых и несжимаемых течениях определяется путем экстраполяции из внутренних точек LES области. Описанный подход иногда называют частично связанным (*semi-coupled*), поскольку при его использовании решение в LES подобласти никак не влияет на решение в RANS подобласти.

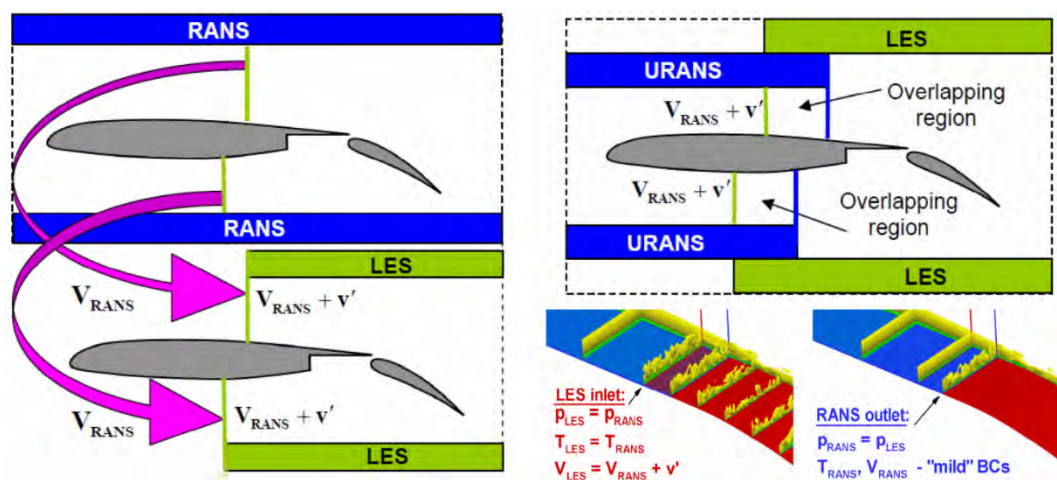


Рис. 17. Схемы двухстадийной (слева) и одностадийной (справа) стратегий реализации зонных RANS-LES методов (из [180]).

В рамках одностадийного подхода, который, в противоположность двухстадийному, называют полностью связанным (*fully coupled*), решение в RANS и LES подобластях расчетной области выполняется одновременно. Это предполагает, что эти области частично перекрываются и что в RANS подобласти используются нестационарные уравнения Рейнольдса (URANS). Кроме того, в этом случае, наряду с граничными условиями на входе в LES подобласть, необходима постановка граничных условий на выходной границе RANS подобласти.

Граничные условия на входе в LES подобласть обычно задаются так же, как и в рамках двухстадийного подхода, но они базируются на решении URANS (это могут быть как мгновенные параметры на предыдущем временном слое, так их бегущие средние значения). Поскольку входная граница LES подобласти является, по существу, межблочной границей в многоблочной сетке, давление на ней можно положить равным давлению из RANS решения даже при расчете дозвуковых или несжимаемых потоков. На выходе из RANS подобласти при расчете дозвуковых и несжимаемых течений давление полагается равным мгновенному давлению, известному из LES решения, или его бегущему среднему, а все остальные переменные экстраполируются из внутренних точек RANS подобласти. При расчете сверхзвуковых течений все переменные, включая давление, определяются путем экстраполяции.

В тех случаях, когда подсеточная модель в LES подобласти является дифференциальной, в дополнение к описанным выше условиям для газодинамических переменных, на RANS-LES интерфейсе необходимо поставить какие-либо граничные условия для подсеточных характеристик турбулентности. Например, при использовании в LES подобласти подсеточных моделей, построенных на основе моделей SA или SST, эти условия задаются следующим образом. Подсеточная вязкость на интерфейсе может быть определена с помощью какой-либо алгебраической модели (например, модели Смагоринского [7] или алгебраической гибридной модели [173]). Подсеточная удельная скорость диссипации ω_{SGS} полагается равной ω_{RANS} , а подсеточная кинетическая энергия турбулентности k_{SGS} рассчитывается по ω_{SGS} и ν_{SGS} : $k_{SGS} = \nu_{SGS} \cdot \omega_{SGS}$.

Описанные выше процедуры (одностадийная и двухстадийная) имеют свои преимущества и недостатки. Так, двухстадийный подход проще в реализации и менее затратен, но может использоваться только в тех случаях, когда течение в RANS подобласти слабо зависит от течения в LES подобласти. С другой стороны, одностадийный подход, обеспечивает большую свободу в выборе положения RANS-LES интерфейса, но является более сложным и требует поддержки перекрывающихся сеток, реализованной далеко не во всех кодах (например, такая возможность отсутствует в наиболее популярных коммерческих кодах ANSYS FLUENT и ANSYS CFX).

Альтернативой одностадийному подходу может служить так называемый «искусственный форсинг» (*artificial forcing*, см., например, [200]). Его идея состоит во введении в уравнения переноса импульса и кинетической энергии турбулентности объемных источников или стоков (*Volume Source - VS*), построенных на основе генератора синтетической турбулентности (*Volume Synthetic Turbulence Generator - VSTG*). Эти члены активируются в ограниченной зоне, лежащей между RANS и LES подобластями (Рис. 18), и построены таким образом, чтобы статистические характеристики пульсаций вниз по потоку от этой зоны соответствовали характеристикам URANS решения вверх по потоку. Главным технологическим преимуществом данного подхода по сравнению с STG-методами является его совместимость с любыми типами сеток. Это связано с тем, что объемные источники и стоки могут активироваться в произвольном наборе ячеек, так что RANS-LES интерфейс может не совпадать с сеточной поверхностью.

Выбор размера зоны, в которой активируется VS, зависит от рассматриваемой

задачи. С одной стороны, при построении зонных гибридных подходов необходимо максимально сократить длину области перехода между RANS и LES, т.е. размер зоны действия объемного источника должен быть как можно меньше. С другой стороны, в некоторых случаях (например, при решении задач аэроакустики) необходимо использование распределенного в пространстве источника, так как в противном случае он производит ложный шум, обусловленный внезапным появлением на RANS-LES интерфейсе турбулентных вихрей. Иными словами, протяженность VSTG должна быть минимальной (вплоть до одной ячейки сетки) для чисто гидродинамических приложений и иметь конечную длину, определяемую компромиссом между точностью расчета гидродинамических и акустических характеристик, для акустических задач.

Заметим, наконец, что для вычисления объемного источника в этой области необходимо знать статистические характеристики турбулентности, которые заимствуются из RANS решения. В случае структурированных сеток эта проблема легко решается путем сноса соответствующих характеристик вдоль линий сетки из лежащей выше по потоку RANS области, однако такой подход неприменим для неструктурированных сеток. Одно из возможных решений этой чисто технологической, но, тем не менее, весьма сложной и важной проблемы предложено в разделе 3.1.3 диссертации.

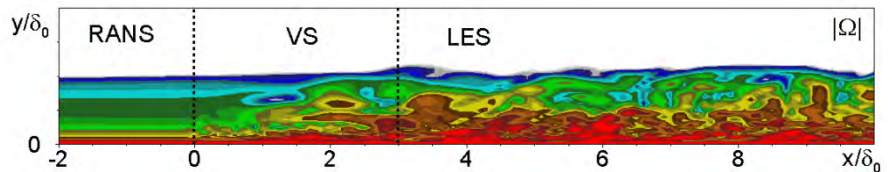


Рис. 18. Схема расположения объемного источника в зонном RANS-LES.

ГЛАВА 2. УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Данная глава посвящена исследованиям автора в области усовершенствования полуэмпирических моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса. В частности, в Разделе 2.1. представлены математические формулировки предложенных им моделей, раздел 2.2 содержит описание численного метода, используемого для решения уравнений Рейнольдса, а в раздел 2.3 приведены результаты тестирования предложенных моделей.

Соавторами моделей и результатов, представленных в настоящей главе, являются Ф. Менгер, Ф. Спаларт, А.А. Матюшенко, А.С. Стабников и Ю.Э. Егоров.

2.1. ФОРМУЛИРОВКА РАЗРАБОТАННЫХ МОДЕЛЕЙ

2.1.1. ЯВНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ BSL EARSМ

Модель BSL EARSМ была предложена в соавторстве с Ф. Менгером и Ю.Э. Егоровым [81] и является развитием WJ EARSМ [76]. В рамках этой модели напряжения Рейнольдса определяются через тензор анизотропии по определению этого тензора

$$\overline{u'_i u'_j} = k \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right). \quad (2.1)$$

Тензор анизотропии в рамках модели [76] раскладывается по тензорному базису [68] следующим образом

$$a_{ij} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_2 T_{2,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij} + \beta_9 T_{9,ij}. \quad (2.2)$$

С практической точки зрения тензорный базис (1.23), предложенный в [68], удобно несколько модифицировать, заменив T_6 на линейную комбинацию T_6 и T_1 , а T_9 – на линейную комбинацию T_9 и T_4 . Такой выбор тензорного базиса позволяет гарантировать $T_6 = T_9 = 0$ в двумерном случае и избежать лишних вычислений при расчете таких течений. В итоге базис предложенной модели выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{1,ij} &= S_{ij}^*, & T_{2,ij} &= S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} II_S^* \delta_{ij}, & T_{3,ij} &= \Omega_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \frac{1}{3} II_\Omega^* \delta_{ij}, & T_{4,ij} &= S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*, \\ T_{6,ij} &= S_{ik}^* \Omega_{kl}^* \Omega_{lj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lj}^* - \frac{2}{3} IV^* \delta_{ij} - II_\Omega^* S_{ij}^*, \\ T_{9,ij} &= \Omega_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mj}^* - \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* \Omega_{mj}^* + \frac{1}{2} II_\Omega^* \left(S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^* \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Величины S_{ij}^* и Ω_{ij}^* являются безразмерными тензорами скоростей деформаций (1.9) и завихренности (1.10):

$$S_{ij}^* = \tau S_{ij}, \quad \Omega_{ij}^* = \tau \Omega_{ij}, \quad (2.4)$$

где τ – турбулентный масштаб времени, предложенный в [201]:

$$\tau = \max\left(1/C_\mu \omega, 6 \cdot \sqrt{\nu/(C_\mu k \omega)}\right). \quad (2.5)$$

Тензорные инварианты II_S^* , II_Ω^* и IV^* , входящие в (2.3), определяются следующим образом

$$II_S^* = S_{ij}^* S_{ji}^*, \quad II_\Omega^* = \Omega_{ij}^* \Omega_{ji}^*, \quad IV^* = S_{ik}^* \Omega_{kj}^* \Omega_{ji}^*. \quad (2.6)$$

Коэффициенты β_i , входящие в (2.2), вычисляются следующим образом:

$$\beta_1 = -N/Q, \beta_2 = 0, \beta_3 = -2IV^*/(NQ_1), \beta_4 = -1/Q, \beta_6 = -N/Q_1, \beta_9 = 1/Q_1, \quad (2.7)$$

где

$$Q = (N^2 - 2II_\Omega^*)/A_1, \quad Q_1 = Q(2N^2 - II_\Omega^*)/6, \quad (2.8)$$

а константы модели равны, соответственно,

$$A_1 = 1.2, C_1' = \frac{9}{4}(C_1 - 1), C_1 = 1.8. \quad (2.9)$$

Величина N определяется соотношением генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности, то есть зависит от искомых напряжений Рейнольдса $N = C_1' + \frac{9}{4} P_k / \varepsilon$. В модели Валлина и Йоханссона [76] для ее определения решается кубическое уравнение

$$N^3 - C_1' N^2 - (2.7 \cdot II_S^* + 2 \cdot II_\Omega^*) N + 2C_1' II_\Omega^* = 0. \quad (2.10)$$

Решение этого уравнения ищется в комбинированном виде (сочетание формулы Кардано и тригонометрической формулы Виета)

$$\begin{cases} N = C_1'/3 + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |P_1 - \sqrt{P_2}|^{1/3} & \text{при } P_2 \geq 0 \\ N = C_1'/3 + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(P_1/\sqrt{P_1^2 - P_2}\right)\right) & \text{при } P_2 < 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

где

$$P_1 = C_1' \left(C_1'^2 / 27 + \frac{9}{20} II_S^* - \frac{2}{3} II_\Omega^* \right), \quad P_2 = P_1^2 - \left(C_1'^2 / 9 + \frac{9}{10} II_S^* + \frac{2}{3} II_\Omega^* \right)^3. \quad (2.12)$$

Следует отметить, что величину N можно приближенно определить следующим образом

$$N = C_1' + \frac{9}{4} P_k / \varepsilon = C_1' + \frac{9}{4} \sqrt{2C_\mu II_S^*}, \quad (2.13)$$

используя выражение для отношения генерации и диссипации в предположении о равновесии турбулентности $P_k/\varepsilon = \sqrt{2C_\mu} II_S^*$ [81] (эта модель получила название S BSL EARSМ). Этот подход, однако, не дает существенного выигрыша в скорости, поскольку время расчета формул (2.11) - (2.12) существенно меньше времени расчета одной итерации.

Как уже было сказано, в оригинальной версии модели [76] замыкающие соотношения (2.1) - (2.12) использовались совместно с дифференциальными уравнениями k - ω модели Вилкокса [60], известной своей аномальной чувствительностью к граничным условиям на свободной границе [78]. Во избежание этого в настоящей модели для определения масштабов турбулентности предлагается использовать модель k - ω BSL [56]. В отличие от модели Хеллстена [79], где для совместного использования моделей WJ и BSL изменялись константы базовой модели, в предлагаемой модели все изменения затрагивают исключительно замыкающие соотношения для определения напряжений Рейнольдса (2.1) - (2.12). Такой подход позволяет сохранить точность расчета двумерных «базовых» течений, на которых калибровалась модель BSL.

В итоговой модели были сделаны два изменения. Первое из них касается увеличения константы A_1 со значения 1.2 [76] до величины

$$A_1 = 1.245. \quad (2.14)$$

Кроме того, из выражения для анизотропии напряжений (2.2) было исключено слагаемое $T_{9,ij}$:

$$\beta_9 = 0, \quad (2.15)$$

поскольку, как показали многочисленные тесты, оно не оказывает заметного влияния на решение.

Уравнения для масштабов турбулентности k и ω в предлагаемой модели совпадают с уравнениями модели BSL (1.13) – (1.14), (1.16) и в сочетании с (2.1) – (2.12), (2.14) – (2.15) полностью определяют представленную в этом разделе модель BSL EARSМ [81].

2.1.2. НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ SST NL

Опыт использования представленной в предыдущем разделе модели BSL EARSМ показал ее высокую эффективность при расчете течений, в которых существенную роль играет анизотропия напряжений Рейнольдса. Однако при расчете пристеночных течений с градиентом давления эта модель зачастую уступает k - ω модели SST. Представленная в настоящем разделе модель SST NL [82], разработанная в соавторстве с А.А. Матюшенко, построена на основе этих двух моделей и объединяет их сильные стороны.

Выражение для рейнольдсовых напряжений τ_{ij} состоит из двух слагаемых, линейного, взятого из модели SST-2003 [57], и нелинейного, построенного на основе модели S BSL EARSМ.

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \overbrace{2\nu_t S_{ij}}^{\text{Линейная часть}} - k \overbrace{\left[\left(S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^* \right) / Q + N \left(S_{ik}^* \Omega_{kl}^* \Omega_{lj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lj}^* - \frac{2}{3} IV^* \delta_{ij} - II_{\Omega}^* S_{ij}^* \right) / Q_1 \right]}^{\text{Нелинейная часть}} \quad (2.16)$$

Турбулентная вязкость в линейном слагаемом определяется выражением модели SST (1.18) – (1.19), а величины, входящие в нелинейное слагаемое, рассчитываются следующим образом:

$$S_{ij}^* = S_{ij} / (C_{\mu} \omega), \quad \Omega_{ij}^* = \Omega_{ij} / (C_{\mu} \omega), \quad (2.17)$$

$$N = C_1' + \frac{9}{4} \sqrt{2C_{\mu} II_S^*}, \quad Q = (N^2 - 2II_{\Omega}^*) / A_1, \quad Q_1 = Q(2N^2 - II_{\Omega}^*) / 6, \quad (2.18)$$

$$II_S^* = S_{mn}^* S_{nm}^*, \quad II_{\Omega}^* = \Omega_{mn}^* \Omega_{nm}^*, \quad IV^* = S_{mn}^* \Omega_{nk}^* \Omega_{km}^*, \quad (2.19)$$

$$A_1 = 1.8, \quad C_1' = \frac{9}{4}(C_1 - 1), \quad C_1 = 1.8, \quad C_{\mu} = 0.09. \quad (2.20)$$

Нелинейная составляющая модели SST NL содержит ряд упрощений по сравнению с оригинальной версией модели, которые состоят в следующем. Во-первых, в ней не используется слагаемое $T_{3,ij}$, т. е. коэффициент $\beta_3 = 0$. Во-вторых, вместо масштаба времени Дурбина (2.5) используется упрощенное выражение $\tau = 1/(C_{\mu}\omega)$. И, наконец, в-третьих, для расчета величины N вместо выражений (2.11) – (2.12) используется упрощенная формула (2.13). Серия тестовых расчетов показала, что эти упрощения не снижают точности расчетов.

Совокупность формул (2.16) – (2.20) в сочетании с уравнениями модели SST-2003 [57] (1.13) – (1.14), (1.16), (1.18) – (1.20) для определения турбулентных масштабов полностью определяет представленную в этом разделе модель SST NL [82].

2.1.3. МОДЕЛЬ SST RC1 ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ С СУЩЕСТВЕННОЙ КРИВИЗНОЙ ЛИНИЙ ТОКА ИЛИ ВРАЩЕНИЕМ ПОТОКА

Предлагаемая в настоящей диссертации поправка на кривизну линий тока и вращение потока для модели SST (модель SST RC1) была разработана в соавторстве с А.С. Стабниковым [101], [202]. Она основана на результатах расчетов вращающегося сдвигового слоя, проведенных методом моделирования крупных вихрей (LES). В связи с этим, ее описание построено следующим образом. Вначале (раздел 2.1.3.1) представлены постановка задачи, метод решения и результаты LES расчетов вращающегося сдвигового слоя, затем (в разделе 2.1.3.2) приводится аналитическое решение уравнений RANS SST модели для рассматриваемой задачи, и, наконец, в разделе 2.1.3.3 представлена новая поправочная функция f_{r1} аналогичная функции (1.28) модели SST RC, которая построена на основе сравнения LES и RANS решений.

2.1.3.1. Расчет сдвигового слоя при наличии вращения методом LES

Задача о развитии однородной турбулентности в поле постоянного сдвига при наличии вращения привлекательна для анализа влияния вращения потока на турбулентность по нескольким причинам. Во-первых, эта задача позволяет исключить влияние дополнительных факторов, таких как влияние твердых стенок. Во-вторых, относительная простота постановки задачи позволяет получить ее LES решение в широком диапазоне скоростей вращения. И, наконец, в-третьих, в рамках RANS эта задача имеет аналитическое решение. Несмотря на то, что данное течение исследовалось экспериментально [203], а также с использованием методов DNS [204] - [206] и LES [207], доступные из литературы данные крайне скудны и недостаточны для калибровки поправки, что привело к необходимости проведения LES.

Рассматривается турбулентное течение несжимаемой жидкости в потоке с постоянным сдвигом средней скорости $S = d\bar{u}/dy$, которое вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью Ω_k (Рис. 19). Интенсивность вращения характеризуется единственным безразмерным параметром – числом Россби $Ro = \Omega_k/S$.

Расчеты методом LES проводились в области $2\pi L_0 \times 4\pi L_0 \times 2\pi L_0$ на равномерной сетке $128 \times 256 \times 128$. Граничные условия по направлениям x и z для всех переменных были периодическими, а по y - периодическими с учетом сдвига скорости. В проведенной серии расчетов число Рейнольдса Re , построенное по масштабу скорости $U_0 = S \cdot L_0$ и линейному размеру L_0 , было равно $Re = 1.6 \cdot 10^3$, а число Россби менялось в интервале от -1.5 до 1.0.

Поле скорости в начальный момент времени было получено суперпозицией однородного сдвига скорости и пульсаций, построенных на основе экспериментального спектра однородной изотропной турбулентности [208] с кинетической энергией равной $4U_0^2$ и масштабом наиболее энергонесущих вихрей равным $0.4L_0$ (пунктирная линия на Рис. 20). Это поле создается с помощью обратного преобразования Фурье, обеспечивающего выполнение уравнения неразрывности и заданное распределение энергетического спектра [67] (пример начального поля скорости приведен на Рис. 21).

Расчеты были выполнены в рамках кода NTS [209] методом LES с подсеточной моделью Смагоринского [7] и константой $C_s = 0.2$ (более подробное описание этого кода применительно к вихреразрешающим подходам представлено в разделе 3.2). Безразмерный временной шаг составлял $\Delta t \cdot S = 5 \cdot 10^{-3}$.

Результаты расчетов показали, что через сравнительно небольшое время энергетический спектр перестраивается, а зависимости спектральной плотности от волнового числа становятся

подобными друг другу (спектры рассчитаны в кубе размером $2\pi L_0$, расположенном в центре расчетной области). Например, на Рис. 20 для $Ro = 0$ видно, что эта перестройка проходит уже к моменту времени $t^* = t \cdot S = 2$. Кроме того, из-за наличия сдвига скорости с течением времени происходит смещение максимума спектра в область низких частот, связанное с увеличением линейного масштаба наиболее энергонесущих вихрей. Когда размер этих вихрей приближается к размеру расчетной области ($L_0 k' < 4$), они начинают искажаться, что, в свою очередь, оказывает влияние на решение в целом. Подобный анализ спектров, позволяющий выделить промежуток времени $[t_0; t_1]$, на котором решение не зависит ни от начального приближения, ни от размера расчетной области, был проведен для всех рассмотренных чисел Россби.

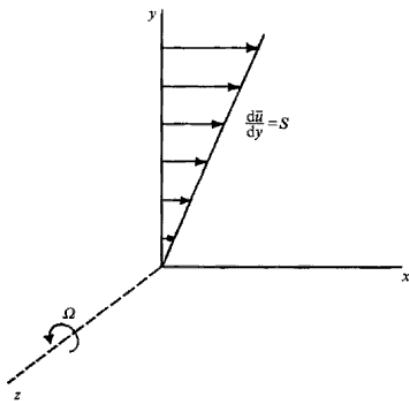


Рис. 19 Постановка задачи о вращающемся сдвиге (из [210]).

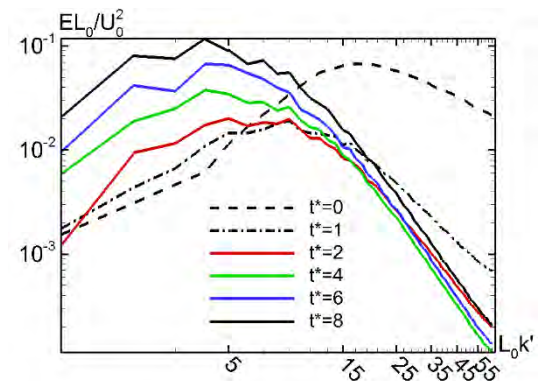


Рис. 20 Характерные спектры турбулентности течения со сдвигом в разные моменты времени.

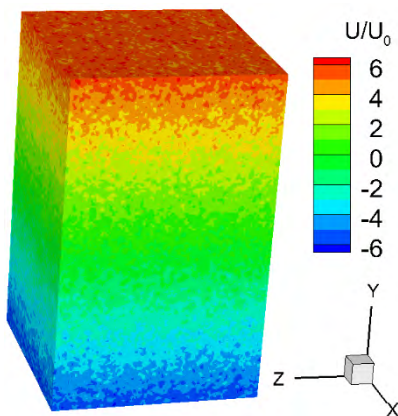


Рис. 21 Поле продольной компоненты скорости в начальный момент времени.

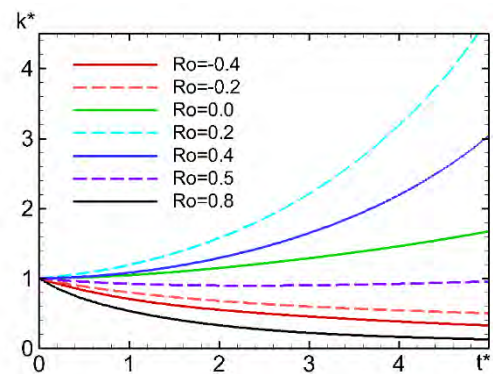


Рис. 22. Зависимость безразмерной кинетической энергии турбулентности от времени при разных числах Россби.

На Рис. 22 приведены зависимости безразмерной разрешенной кинетической энергии турбулентности $k^* = k/k(t_0)$ от безразмерного времени $t^* = (t-t_0)S$ при различных значениях числа Россби. Видно, что вращение потока приводит заметному изменению скорости роста кинетической

энергии турбулентности, а при больших скоростях вращения кинетическая энергия уменьшается со временем.

2.1.3.2. Аналитическое решение уравнений модели SST для рассматриваемого течения

В силу однородности рассматриваемого течения по пространству турбулентные характеристики k и ω не зависят от координат, а являются только функцией времени. В этом случае уравнения модели SST (1.13) – (1.16), (1.18) – (1.20) с поправкой на кривизну линий тока и вращение потока упрощаются до системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть записана в следующей безразмерной форме

$$\begin{cases} \partial k^* / \partial t^* = f_{r1} S^2 k^* / \omega^* - \beta^* \rho \omega^* k^*, \\ \partial \omega^* / \partial t^* = \alpha S^2 - \beta \omega^{*2}, \end{cases} \quad (2.21)$$

где $t^* = (t-t_0)S$, $\omega^* = \omega/S$, $k^* = k/k_0$, а α , β , β^* - константы модели SST [56]. В отличие от поправки [100], в системе (1.13) функция f_{r1} является множителем только генерационного члена в уравнении для кинетической энергии турбулентности и не входит в уравнение для удельной диссипации ω^9 .

Поскольку функция f_{r1} (поправка на кривизну линий тока и вращение) зависит только от числа Россби и при заданном вращении является постоянной, система уравнений (2.21) имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} k^*(t^*) = M_2^{-1} \cdot ch\left(\frac{-\beta \cdot t^* + M_1}{2y_1}\right)^{2f_{r1}y_1/(y_2\beta)} / \left| sh\left(\frac{-\beta \cdot t^* + M_1}{2y_1}\right) \right|^{2\beta^*y_2y_1/\beta}, \\ \omega^*(t^*) = y_2 \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{-\beta \cdot t^* + M_1}{y_1}\right) \right] / \left[1 - \exp\left(\frac{-\beta \cdot t^* + M_1}{y_1}\right) \right] \end{cases}, \quad (2.22)$$

где $M_1 = y_1 \ln\left|\frac{\omega_0^* - y_2}{\omega_0^* + y_2}\right|$, $M_2 = \left[ch\left(\frac{M_1}{2y_1}\right)^{2f_{r1}y_1/(y_2\beta)} \right] / \left[\left| sh\left(\frac{M_1}{2y_1}\right) \right|^{2\beta^*y_2y_1/\beta} \right]$,

$$\omega_0^* = \left(f_{r1} - \left(\partial k^* / \partial t^* \right)_0 \right) / \beta^*, \quad y_1 = 1/(2y_2), \quad y_2 = \sqrt{\alpha f_{r1} / \beta}.$$

Таким образом, решение для безразмерной кинетической энергии турбулентности k^* (2.22) является семейством параметрических кривых, зависящих от параметра f_{r1} (Рис. 23).

2.1.3.3. Построение поправочной функции

Сравнение зависимостей $k^*(t^*)$, полученных с использованием LES (Рис. 22) с аналитическим решением (2.22) (Рис. 23) позволяет «подобрать» значение f_{r1} , обеспечивающее совпадение

⁹ В процессе разработки поправки рассматривались оба варианта, и по результатам тестирования был выбран наиболее эффективный.

решения SST с результатами LES для каждого числа Россби (пример такого «подбора» для $Ro = 0.2$ приведен на Рис. 24). Такой подход позволяет определить зависимость $f_{r1}(Ro)$, при использовании которой результаты k - ω SST модели будут совпадать с LES (Рис. 25, символы).

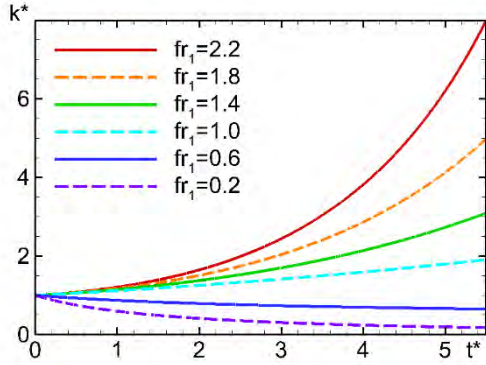


Рис. 23. Семейство кривых, описываемое уравнением (1.42).

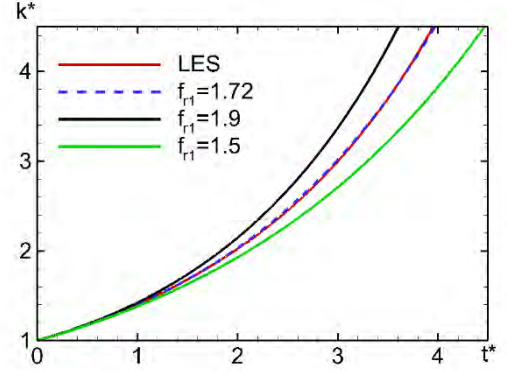


Рис. 24. «Подбор» значения f_{r1} , обеспечивающего совпадение с LES для $Ro=0.2$.

Поскольку параметры \tilde{r} и r^* в данной задаче также зависят только от числа Россби, на основе зависимости $f_{r1}(Ro)$ можно построить аппроксимирующую функцию $f_{r1,mod}(\tilde{r}, r^*)$, которая и является предлагаемой поправкой (Рис. 25, синяя линия):

$$f_{r1,mod} = \max\{\tilde{f}_{r1}, 0.0\},$$

$$\tilde{f}_{r1} = (1 + c_{r1})(1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_{r2}\tilde{r}))(1 + c_{r4}) / \left((1 + c_{r4} \cdot |r^* - 2|) - c_{r1} \right), \quad (2.23)$$

$$c_{r1} = 0.4, c_{r2} = 1.0, c_{r3} = 0.6, c_{r4} = 0.1.$$

Из Рис. 25 видно, что подобранная функция практически совпадает с данными LES при $-0.3 \leq Ro \leq 0.4$, в то время как поправка [100] (красная линия) принимает предельные значения 0 и 1.25 практически во всем диапазоне чисел Россби. Это, как уже было сказано, является существенным ее недостатком, поскольку, достигая ограничителя, функция перестает «различать» изменение критериев \tilde{r} и r^* , что ведет к отсутствию реакции на усиление или ослабление эффектов кривизны линий тока и вращения.

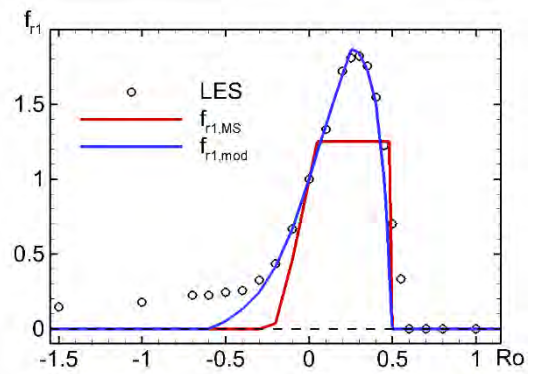


Рис. 25. Сравнение зависимости $f_{r1}(Ro)$, полученной из LES, с предложенной поправкой и поправкой [100].

2.1.4. МОДЕЛЬ SST HL ДЛЯ РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ УСЛОВИЯХ БЛИЗКИХ К СРЫВУ ПОТОКА

Данная модель была предложена в соавторстве с А.А. Матюшенко, Ф. Менгером и П.Е. Смирновым в работах [117], [211].

Как уже отмечалось в разделе 1.1, при расчете обтекания аэродинамических профилей, существующие модели RANS приводят к значительному завышению критического угла атаки, то есть угла атаки, при котором возникает отрыв потока от передней кромки профиля.

В модели SST отрыв от гладкой поверхности в значительной степени контролируется величиной константы a_1 , входящей в определение турбулентной вязкости (1.18).

В работе [212] на примере обтекания профиля A-Airfoil при числе Рейнольдса $Re = 2.1 \cdot 10^6$, было показано, что при уменьшении значения константы a_1 с 0.31 до 0.28 существенно повышается точность расчета коэффициента подъемной силы при углах атаки в окрестности срыва потока (Рис. 26). Однако такая модификация приводит существенному снижению точности расчета присоединенного пограничного слоя на плоской пластине, а именно к уменьшению трения на стенке (Рис. 27), что исключает возможность ее использования для проведения расчетов при произвольных углах атаки.

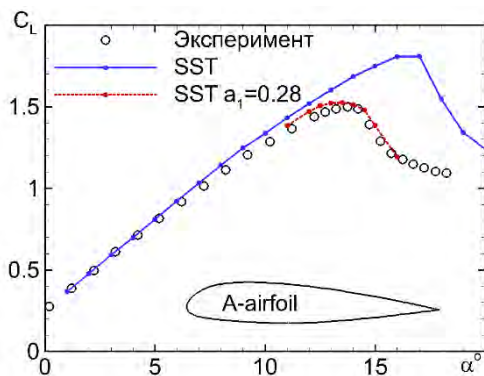


Рис. 26. Сравнение расчетных и экспериментальных [213] зависимостей коэффициента подъемной силы от угла атаки для крылового профиля A-Airfoil с использованием оригинальной и уменьшенной константы a_1 модели SST.

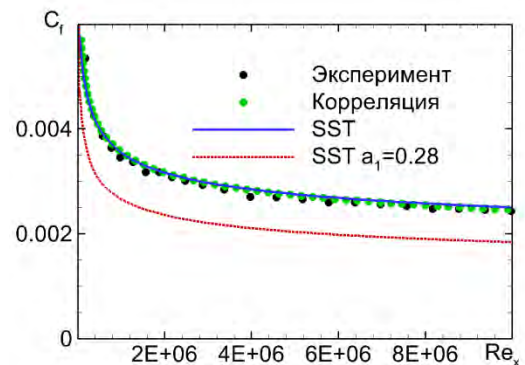


Рис. 27. Сравнение расчетных и экспериментальных [214], [215] распределений коэффициентов трения на плоской пластине с использованием оригинальной и уменьшенной константы a_1 модели SST.

Серия предварительных расчетов, выполненных в настоящей работе, показала, что распределение коэффициента трения в присоединенном пограничном слое контролируется значением константы a_1 в его внутренней области, в то время как положение точки отрыва определяются, главным образом, значением a_1 во внешней области. Это позволило построить модификацию модели SST, в которой вместо константы a_1 используется функция A_{HL}

$$v_t = A_{HL} k / \max(A_{HL} \omega, SF_2), \quad (2.24)$$

которая построена таким образом, чтобы принимать значение 0.31 во внутренней области пограничного слоя и значение 0.28 – во внешней области (Рис. 28):

$$A_{HL} = a_1 F_3 + a_{HL} (1 - F_3), \quad a_1 = 0.31, \quad a_{HL} = 0.28. \quad (2.25)$$

Такое поведение обеспечивается эмпирической весовой функцией F_3 , построенной по аналогии с функциями F_1 (1.12) и F_2 (1.19):

$$F_3 = \tanh(\arg_3^4), \quad \arg_3 = \max\left(2\sqrt{k}/(3\beta^* \omega d_w), 500\nu/(d_w^2 \omega)\right). \quad (2.26)$$

Следует отметить, что для учета ламинарно-турбулентного перехода совместно с SST HL моделью, также как и с моделью SST, может использоваться дополнительное уравнение переноса для величины перемежаемости γ [216], (модель γ -SST HL), которое решается совместно с уравнениями для кинетической энергии турбулентности k и скорости удельной диссипации ω .

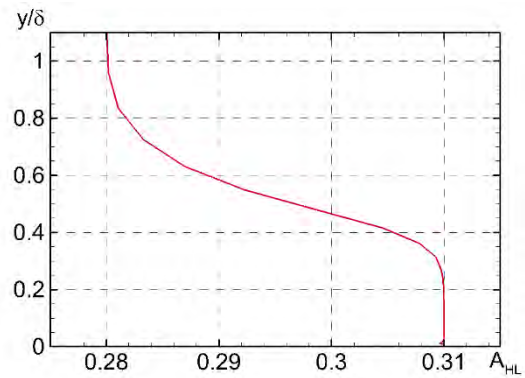


Рис. 28. Распределение функции A_{HL} поперек пограничного слоя.

2.1.5. МОДЕЛЬ SA TC ДЛЯ РАСЧЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Данная модель была разработана в соавторстве с Ф. Спалартом¹⁰. Она предназначена для повышения точности оригинальной модели SA при расчете течений, характеризующихся наличием значительной поперечной кривизны (*Transverse Curvature – TC*), например, осесимметричных струй. Она отличается от модели SA наличием дополнительного члена в правой части уравнения переноса турбулентной вязкости (1.2):

$$+C_{b3} \left[\max(1-r, 0) \right]^3 \rho \tilde{\nu} \lambda_2 / \sigma. \quad (2.27)$$

Величина r в (2.27) определяется выражением (1.4), эмпирическая константа $C_{b3} = 6$, а величина λ_2 представляет собой второе ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) собственное число матрицы Гессе $H_{ij} = \partial^2 \tilde{\nu} / \partial x_i \partial x_j$ и характеризует поперечную кривизну изоповерхности поля $\tilde{\nu}$, проходящей через рассматриваемую точку.

¹⁰ Статья, посвященная этой модели, принята к печати в журнал Flow, Turbulence and Combustion, однако к моменту написания диссертации еще не была опубликована.

2.1.6. МОДЕЛЬ SA LOW-RE ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ ПРИ НИЗКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Модель SA Low-Re, также как и модель SA TC, была разработана в соавторстве с Ф. Спалартом [122]. Она предназначена для повышения точности расчета турбулентных течений при относительно низких значениях числа Рейнольдса, при которых использование модели SA приводит к значительному занижению коэффициента трения на обтекаемой поверхности.

Предлагаемая модификация модели SA состоит в замене константы $C_{w2} = 0.3$, входящей в выражение для функции f_w (1.4), на эмпирическую функцию

$$C_{w2LRe} = C_{w4} + C_{w5}/(\chi/40+1)^2, \quad (2.28)$$

в которой значения новых констант равны, соответственно, $C_{w4} = 0.21$ и $C_{w5} = 1.5$.

Из Рис. 29 видно, что изменение наиболее существенно при малых величинах турбулентной вязкости ($\chi < 60$), т.е., сказывается только при низких локальных числах Рейнольдса.

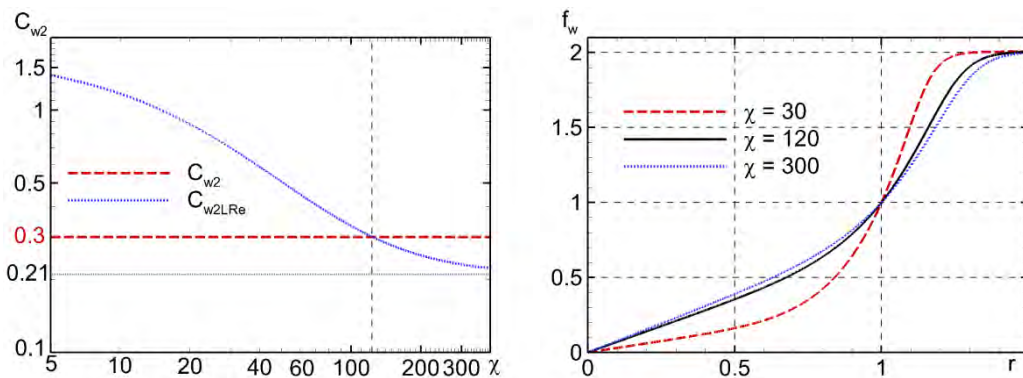


Рис. 29. Предложенная функция (2.28) и ее влияние на функцию f_w модели Спаларта-Аллмараса.

2.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Все описанные в разделе 2.1 модели были реализованы автором в академическом CFD коде общего назначения NTS (*Numerical Turbulence Simulation*) лаборатории «Вычислительная аэроакустика и турбулентность» СПбПУ [209]. Кроме того, модель BSL EARSM была независимо реализована Ю.Э. Егоровым в коде ANSYS FLUENT, а модели SST NL, SST RC1 и SST HL были реализованы А.А. Матюшенко в ANSYS FLUENT с использованием пользовательских функций UDF (User Defined Functions).

Верификация предложенных моделей (проверка правильности их реализации в коде NTS) проводилась путем ряда простейших проверок полученных результатов на непротиворечивость, а также путем их сравнения с соответствующими результатами кода ANSYS FLUENT. Кроме того, модель BSL EARSM была независимо имплементирована различными группами в ANSYS

CFX 12.0 [81], в код NUMECA [217] и в код ЦАГИ, использующий разрывный метод Галеркина [218]. Во всех этих случаях авторами проводилось сравнение полученных результатов с аналогичными результатами NTS, опубликованными в литературе, и констатировалась их идентичность, что служит дополнительным подтверждением правильности реализации модели BSL EARSM в этом коде.

Тестирование разработанных моделей турбулентности осуществлялось в два этапа.

На первом этапе было показано, что при расчете базовых турбулентных пристеночных течений, при расчете которых разработанные модификации не должны оказывать заметного влияния на полученные результаты (например, установившееся течение в плоском канале и пограничный слой на пластине), полученные с их использованием результаты действительно оказываются практически идентичными соответствующим результатам, полученным с помощью оригинальных версий моделей.

На втором этапе проводился расчет течений, в которых разработанные модификации могут (и должны) оказывать влияние на полученные результаты, и выполнялось их сравнение с результатами, полученными при использовании оригинальных моделей, с доступными экспериментальными данными и с результатами прямого численного моделирования.

Ниже приведено краткое описание использовавшихся при верификации и тестировании численных методов, расчетных сеток и граничных условий в рамках кодов NTS и ANSYS FLUENT.

Код NTS

Код NTS представляет собой конечно-объемный код, работающий на структурированных многоблочных перекрывающихся сетках (так называемая технология *Chimera*), что, с одной стороны, позволяет применять разработанные для структурных сеток схемы повышенного порядка аппроксимации, а с другой, - обеспечивает возможность проведения расчетов в областях сложной геометрической формы. Код NTS имеет две ветви, предназначенные для расчета несжимаемых и сжимаемых турбулентных течений, соответственно.

При расчете сжимаемых течений, рассмотренных в данной работе, независимо от используемой модели турбулентности, турбулентная составляющая теплового потока в уравнении баланса энергии определяется на основе аналогии Рейнольдса $\overline{\rho u'_j T'} \approx -\mu_t / Pr_t \cdot \partial T / \partial x_j$, где μ_t - турбулентная вязкость, а Pr_t - турбулентный аналог числа Прандтля. Кроме того, предполагается, что рабочим газом является воздух с молекулярной массой $M = 29$ Кг/Кмоль, и выполняется уравнение состояния совершенного газа $p = \rho M / R_0 T$. Коэффициент удельной теплоемкости при

постоянном давлении полагается постоянным $C_p = 10^3$ Дж/(кг·К), что соответствует показателю адиабаты $\gamma \approx 1.4$. Молекулярное число Прандтля полагается равным 0.71, а его турбулентный аналог – 0.9. Наконец, зависимость вязкости воздуха от температуры определяется при помощи формулы Сазерленда $\mu = \mu_0 (T/T_0)^{3/2} (T_0+S)/(T+S)$, где $S = 110.4$ К, $T_0 = 291.15$ К, а $\mu_0 = 1.827 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).

Решение стационарных уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью рассматриваемых моделей турбулентности, проводилось методом установления по псевдовремени, производные по которому аппроксимировались с первым порядком точности. При этом для ускорения сходимости к стационарному решению использовался локальный (зависящий от координат) шаг интегрирования по “времени” (релаксационный параметр) Δt , который определялся через число Куранта CFL и ограниченный снизу величиной h_{\min} локальный минимальный шаг расчетной сетки $\Delta = \max[\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, h_{\min}]$: $\Delta t = \text{CFL} \cdot \Delta / U_0$.

Невязкие составляющие векторов потоков аппроксимировались с использованием противопоточных схем. В частности, для уравнений Рейнольдса использовалась противопоточная схема третьего порядка точности, а для уравнений переноса турбулентных характеристик – второго или первого. Вязкие составляющие векторов потоков во всех уравнениях аппроксимировались с использованием центрально-разностной схемы второго порядка.

При расчете несжимаемых течений использовался метод расщепления разностей векторов потоков Роджерса-Квака [219], основанный на комбинации метода введения искусственной сжимаемости Яненко-Чорина [220] и схемы расщепления разностей векторов газодинамических потоков, а для сжимаемых течений задач – метод Роу [221] с использованием ограничителей [222] для невязких составляющих векторов потоков.

Решение системы дискретных аналогов исходных газодинамических уравнений, записанных относительно приращений искомых функций, на каждой глобальной итерации осуществлялось с помощью релаксации Гаусса-Зейделя по плоскостям, а для решения уравнений переноса турбулентных характеристик, также сформулированных относительно приращений, использовался модифицированный (с диагональным преобладанием) метод приближенной факторизации по пространственным направлениям.

Расчеты проводились с использованием параллельной версии кода, которая базируется на комбинированной MPI/Open-MP концепции параллелизации, что позволяет обеспечить эффективную работу программы на компьютерах как с распределенной, так и с общей или комбинированной оперативной памятью.

Используемые расчетные сетки имели сгущение в окрестности стенок, а шаг сетки по нормали к твердой поверхности изменялся по закону геометрической прогрессии с ограничением максимального значения. При этом величина первого пристеночного шага выбиралась таким образом, чтобы выполнялось условие $\Delta y_1^+ < 1$, а коэффициент прогрессии не превышал значения 1.3. Для всех рассмотренных задач получены сошедшиеся решения, не изменяющиеся при дальнейшем измельчении расчетной сетки.

При решении представленных ниже задач использовались следующие граничные условия.

На входной границе расчетной области при расчете несжимаемых течений задавались компоненты скорости, а давление определялось путем линейной экстраполяции изнутри расчетной области. На выходной границе давление полагалось постоянным, а значение вектора скорости определялась путем линейной экстраполяции по внутренним точкам области.

Граничные условия на свободных границах для сжимаемых уравнений Рейнольдса зависят от двух факторов: принадлежит ли граница пограничному слою и является ли скорость потока по нормали к границе дозвуковой или сверхзвуковой. На сверхзвуковой входной границе для всех искомым переменных задавались соответствующие значения, а на выходной использовались условия экстраполяции. На входной дозвуковой границе внутри пограничного слоя задавались профили скорости и температуры, а давление экстраполировалось. На выходной границе имела место обратная ситуация: задавалось постоянное значение давления, а для скорости и температуры использовались условия экстраполяции. На входных и выходных границах вне пограничного слоя использовались характеристические граничные условия [268], сформулированные относительно инвариантов Римана. Наконец, для турбулентных характеристик задавались их значения на входе в расчетную область и использовались условия экстраполяции на выходе.

В рамках NTS кода на твердых стенках использовались так называемые «условия прилипания», в рамках которых скорость, турбулентная вязкость и кинетическая энергия турбулентности полагались равными нулю, а для давления использовалось предположение о равенстве нулю производной от по нормали к стенке, которое вытекает из уравнения баланса импульса в проекции на нормаль к поверхности (см., например, [223]). Удельная диссипация кинетической энергии определялась по формуле, предложенной Ф. Менгером [56]:

$$\omega_w = 10 \cdot 6\nu / (\beta_1 \Delta y_1^2). \quad (2.29)$$

При расчете большинства сжимаемых течений эти условия по умолчанию дополнялись условием нулевого теплового потока на стенке.

Код ANSYS FLUENT

В ANSYS FLUENT дискретизация уравнений RANS производится методом конечных объемов на неструктурированных сетках с хранением данных в центрах ячеек (подробное описание реализованных в коде алгоритмов приведено в работах [224] - [229]), а для решения дискретных уравнений используется неявный точечный метод Гаусса-Зейделя в сочетании с алгебраическим многосеточным методом [224]. Для решения стационарных уравнений Рейнольдса в ANSYS FLUENT используется одновременный метод численного решения уравнений движения и неразрывности путем решения совместной системы дискретных уравнений (*Coupled method for pressure-velocity coupling*) [225]. Невязкие потоки в уравнениях движения и переноса турбулентных характеристик аппроксимируются противопоточной схемой второго порядка [225], [226] с поправкой Рай-Чоу [230], позволяющей подавлять ложные четно-нечетные осцилляции давления. Для аппроксимации уравнения неразрывности используется взвешенная интерполяция, основанная на центральных разностях [230] (так называемая схема *Standard*), а градиенты рассчитываются по формуле Гаусса-Грина, записанной относительно центров ячеек [224] - [226].

Существенной особенностью ANSYS FLUENT является использование на твердых стенках универсальных граничных условий NWT [231], [232], построенных с использованием пристеночных функций, которые формально применимы при любых значениях Δy_1^+ . Граничные условия NWT [231], [232] формулируются следующим образом. Поток импульса на стенку равен касательному напряжению

$$\tau_w^{FW} = \rho \cdot u_\tau \cdot u^*, \quad (2.30)$$

где u_τ и u^* - аналоги динамической скорости, определяемые следующим образом:

$$u^* = \sqrt[4]{(v \cdot U^C / d_w^C)^2 + (0.3 \cdot k^C)^2}, \quad (2.31)$$

$$u_\tau = \sqrt[4]{(u_\tau^{vis})^4 + (u_\tau^{turb})^4}, \quad u_{\tau,i}^{vis} = \sqrt{v \cdot U^C / d_w^C}, \quad u_{\tau,i}^{turb} = U^C / (\log(y^+) / \kappa + 5.2), \quad y^+ = u^* \cdot d_w^C / v.$$

Здесь верхним индексом «C» обозначены величины, вычисляемые в центре пристеночной ячейки, U – величина скорости по касательной к стенке. Для k - ω моделей поток кинетической энергии турбулентности на стенке равен 0, а поток удельной диссипации определяется следующим образом

$$\omega^{WF} = \sqrt{(\omega^{vis})^2 + (\omega^{turb})^2}, \quad \omega^{vis} = 6v / \beta_1 \cdot (u^* / [v \cdot y^+])^2, \quad \omega^{turb} = [u^*]^2 / [0.3 \kappa v y^+]. \quad (2.32)$$

Такие граничные условия эквивалентны «условиям прилипания» на низкорейнольдсовых сетках ($\Delta y_1^+ < 1$) и переходят в пристеночные функции (*Wall Functions*) при увеличении первого пристеночного шага сетки.

2.3. ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ RANS МОДЕЛЕЙ

Представленные в настоящем разделе результаты получены либо самим автором, либо аспирантами А.А. Матюшенко и А.С. Стабниковым под его непосредственным руководством, и опубликованы в работах [50], [81], [82], [101], [116], [117], [122], [202], [233], [234]. Исключение составляют результаты расчета модели самолета DLR-F6, полученные Ю.Э. Егоровым в коде ANSYS CFX [81] в ходе совместного тестирования модели BSL EARSM.

2.3.1. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ BSL EARSM и SST NL

2.3.1.1. Развитое турбулентное течение в канале квадратного сечения

Данное течение является общепринятым тестом для оценки способности моделей турбулентности правильно описывать течение в двухгранных углах.

Постановка задачи

Рассматривается развитое течение несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения при числе Рейнольдса, построенном по динамической скорости $u_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$ и высоте канала H , $Re_\tau = Hu_\tau/\nu = 1200$ ($\bar{\tau}_w$ - осредненное по периметру сечения канала трение на стенке), что соответствует условиям DNS расчета [235]. При этом число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости U_b и высоте канала, оказывается зависящим (хотя и весьма слабо) от используемой модели турбулентности и изменяется в диапазоне $(2.15 - 2.22) \cdot 10^4$.

В рассматриваемом течении все три компоненты скорости отличны от нуля, но поскольку течение является установившимся, их изменение имеет место только в поперечной плоскости YZ . В связи с этим решение уравнений переноса всех трех составляющих импульса осуществлялось на двумерной сетке в плоскости YZ . При этом в уравнение переноса продольной составляющей импульса вводилось дополнительное слагаемое (однородный по пространству объемный источник), которое обеспечивало соответствие решения заданному числу Рейнольдса Re_τ :

$$\partial p / \partial x = 4\rho u_\tau^2 / H, \quad u_\tau = Re_\tau \nu / H. \quad (2.33)$$

Кроме того, в силу симметрии течения относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей симметрии канала, расчеты выполнялись в области, представляющей собой один из четырех квадрантов поперечного сечения канала, то есть, в прямоугольнике размером $0.5H \times 0.5H$ (Рис. 30). Общее число узлов сетки составило 127×127 .

Результаты расчетов

Все результаты расчетов представлены в безразмерной форме с использованием высоты канала H в качестве масштаба длины и среднерасходной скорости U_b в качестве масштаба скорости. На Рис. 31 - Рис. 34 представлено сравнение результатов, полученных при расчете рассматриваемого течения с помощью разработанных моделей BSL EARSМ и SST NL с результатами DNS [235] и линейной модели SST [56].

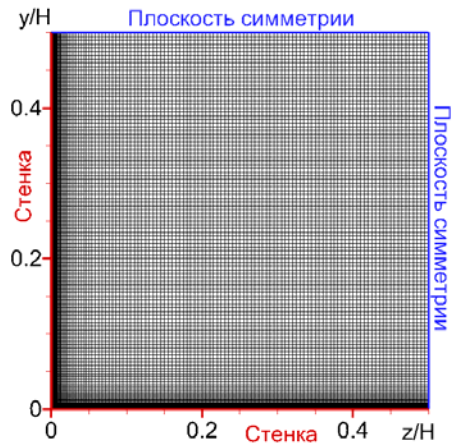


Рис. 30. Расчетная область и сетка для расчета установившегося течения в квадратном канале.

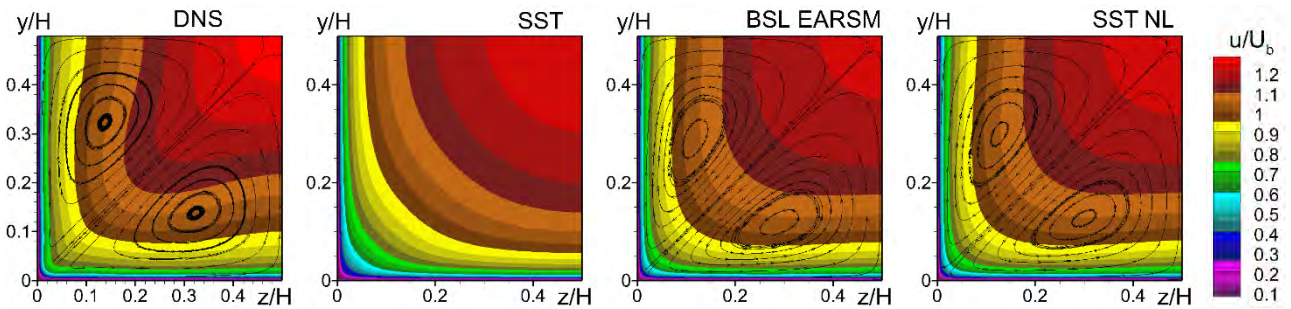


Рис. 31. Сравнение распределений продольной скорости, полученных с использованием рассматриваемых моделей турбулентности, с данными DNS [235].

В частности, на Рис. 31, показаны контуры продольной составляющей вектора скорости и линии тока вторичного течения, рассчитанные с использованием всех моделей. Из сравнения этих данных с результатами DNS [235] видно, что из-за неспособности предсказать возникновение вторичных токов, линейная модель SST существенно искажает поле продольной компоненты скорости. В противоположность этому, обе разработанные нелинейные модели предсказывают наличие вторичного течения и, как следствие, значительно лучше описывают также и поле продольной скорости. Однако, как следует из Рис. 32, в рамках этих моделей интенсивность вторичных токов оказывается заниженной, причем наиболее существенное отклонение результатов расчетов с их использованием от результатов DNS наблюдается в непосредственной окрестности двухгранного угла канала ($y/H < 0.1$ и $z/H < 0.1$).

На Рис. 33 построены расчетные распределения продольной и поперечной составляющих скорости и нормальных напряжений вдоль диагонали поперечного сечения канала, которые характеризуют точность предсказания рассматриваемыми моделями интенсивности вторичного течения, а на Рис. 34 показаны распределения коэффициента трения вдоль стенки канала. Эти параметры являются наиболее важными характеристиками потока с практической точки зрения,

и как видно из рисунков, точность их расчета с помощью нелинейных моделей существенно выше, чем с помощью линейной модели SST.

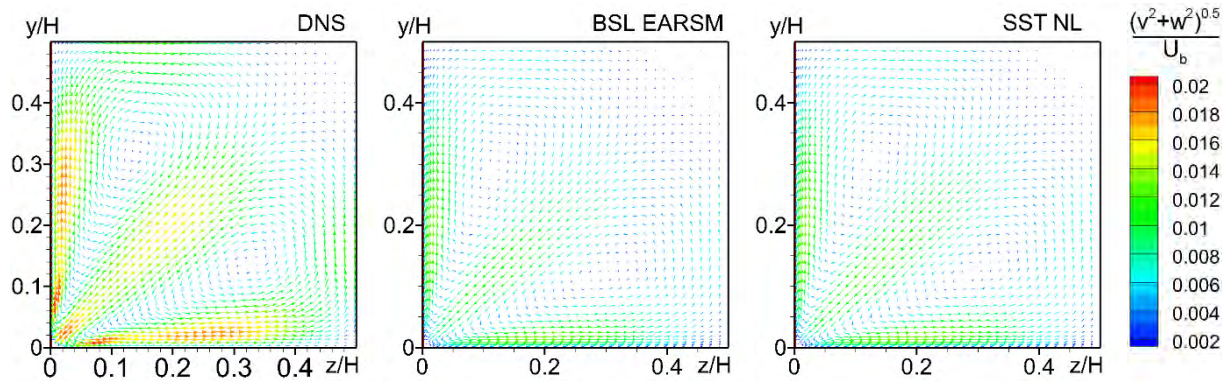


Рис. 32. Сравнение векторных полей скорости и интенсивности вторичного течения, полученных с использованием рассматриваемых моделей турбулентности, с данными DNS [235].

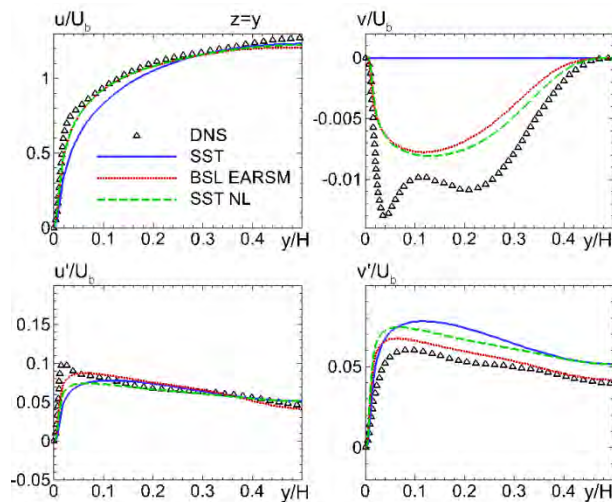


Рис. 33. Сравнение распределений продольной и поперечной компонент скорости и нормальных напряжений вдоль диагонали поперечного сечения канала $z = y$, рассчитанных с использованием рассматриваемых моделей турбулентности, с данными DNS [235].

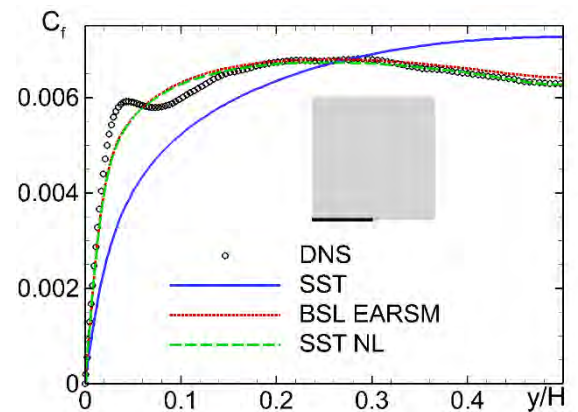


Рис. 34. Сравнение распределения коэффициента трения вдоль стенки канала, рассчитанного с использованием рассматриваемых моделей турбулентности, с данными DNS [235].

Полученные результаты позволяют заключить, что, несмотря на относительно низкие значения скорости вторичных токов (1-2% от среднерасходной скорости), они оказывают весьма заметное влияние на течение в целом. Хотя обе разработанные нелинейные модели несколько занижают интенсивность вторичных токов, особенно в непосредственной окрестности двугранного угла при $y/H < 0.1$ и $z/H < 0.1$, они обеспечивают значительное повышение точности расчета основного течения и трения на стенках канала.

2.3.1.2. Течение в асимметричном прямоугольном диффузоре

Данное течение является сложным тестом для моделей турбулентности, поскольку оно характеризуется не только наличием двухгранных углов (вторичных токов), но и формированием

обширной зоны отрыва, параметры и положение которой крайне чувствительны к используемой модели.

Постановка задачи

Рассматривается течение несжимаемой жидкости в несимметричном диффузоре прямоугольного сечения (Рис. 35), экспериментальное исследование течения воды в котором было выполнено методом магнитно-резонансного измерения скорости в Стэнфордском университете [236], [237]. Число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости на входе $U_b = 1$ м/с и высоте канала ($H = 1$ см), равно 10^4 . Расчет течения в диффузоре проводился в рамках трехмерных стационарных уравнений Рейнольдса для несжимаемой жидкости.

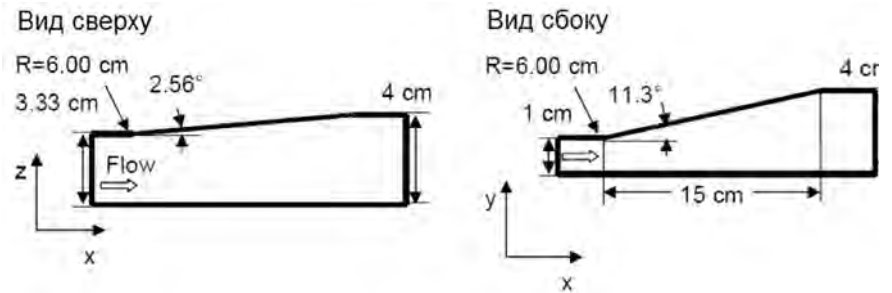


Рис. 35. Схема асимметричного диффузора (из [236]).

В экспериментах вверх по потоку от диффузора был расположен длинный канал прямоугольного сечения, так что течение на входе в диффузор является развитым. В связи с этим для получения профиля скорости во входном сечении диффузора вначале был выполнен расчет развитого течения в прямоугольном канале. Постановка этой задачи аналогична постановке задачи о развитом течении в квадратном канале, подробно описанной в предыдущем разделе. Единственное отличие состояло в том, что расчетная область в плоскости YZ (Рис. 36) представляла собой не квадрат, а прямоугольник размером $1.665H \times 0.5H$ (общее число узлов сетки было равно 61×46).

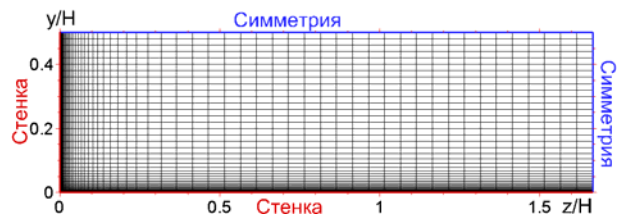


Рис. 36. Расчетная область и сетка, использовавшиеся при проведении расчета установившегося течения в прямоугольном канале.

Конфигурация расчетной области, использовавшейся для расчета самого диффузора, показана на Рис. 37. Длины прямых участков канала, расположенных вверх и вниз по потоку от диффузора, составляли, соответственно, $(L_x)_{inlet} = 3H$ и $(L_x)_{outlet} = 30H$. На входной границе расчетной области задавались профили скорости и турбулентных характеристик, полученные в результате расчета установившегося течения в прямоугольном канале.

Сетка на входной границе диффузора совпадала с сеткой, использовавшейся для расчета установившегося течения в прямоугольном канале (Рис. 36), что исключало необходимость интерполяции при задании граничных условий на входе в диффузор. Одноблочная сетка, использовавшаяся для расчета течения в диффузоре, показана на Рис. 37. Она имела размер $145 \times 91 \times 121$ и

строилась путем масштабирования расчетной сетки во входном сечении диффузора с учетом текущих размеров его поперечного сечения. Максимальные шаги сетки внутри диффузора в продольном и поперечном направлениях составляли $0.3H$ и $0.08H$, соответственно. Как показали расчеты на более мелкой сетке ($165 \times 121 \times 167$), этого было достаточно для получения сеточно-независимого решения.

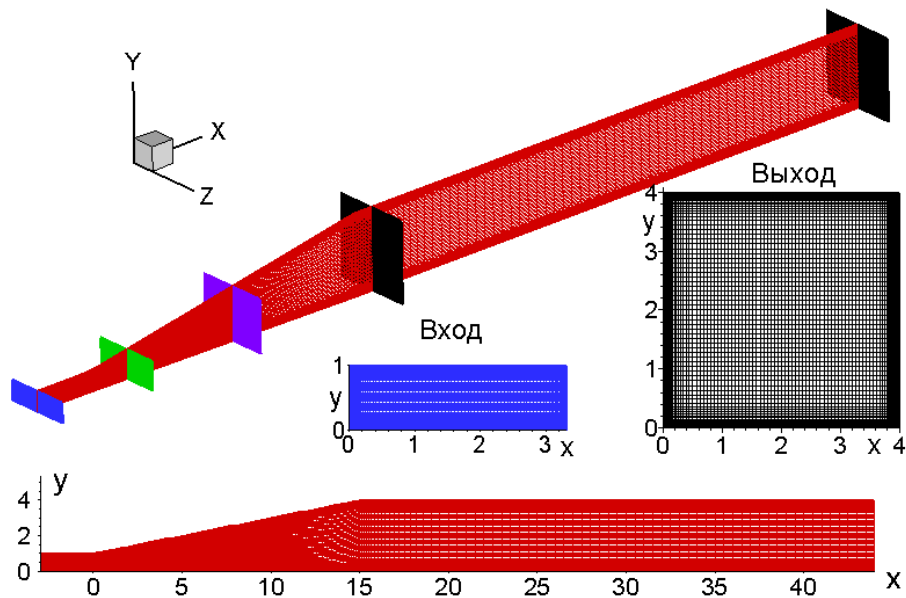


Рис. 37. Расчетная область и сетка, использовавшиеся при проведении расчета установившегося течения в прямоугольном диффузора.

Результаты расчетов

Результаты расчетов представлены в безразмерной форме с использованием высоты входного канала H в качестве масштаба длины и среднерасходной скорости на входе U_b в качестве масштаба скорости.

На Рис. 38 представлено сравнение полей продольной скорости и линий тока во входном сечении диффузора, рассчитанных с использованием всех рассматриваемых моделей турбулентности, с экспериментом. Следует отметить, что в эксперименте регулярная картина вторичных токов не наблюдалась, что, по-видимому, объясняется погрешностью измерений.

Результаты расчетов течения в диффузоре в рамках всех рассматриваемых моделей представлены на Рис. 39 и Рис. 40.

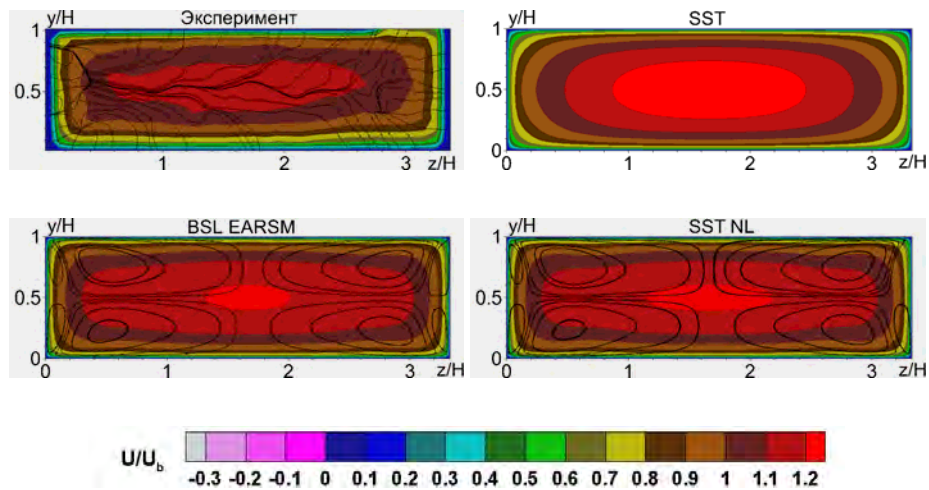


Рис. 38. Сравнение расчетных полей скорости во входном сечении диффузора с экспериментальными данными [236], [237].

В частности, из Рис. 39 видно, что, хотя нелинейные модели существенно превосходят линейную модель SST по точности предсказания коэффициента давления $C_p = (p-p_0)/(\rho_0 U_0^2)$ вдоль диффузора, различие с результатами эксперимента остается достаточно большим. Причины этого становятся ясными из Рис. 40, на котором представлены поля продольной составляющей вектора скорости в различных сечениях диффузора. Из него следует, что модель SST неверно предсказывает положение зоны отрыва: в расчетах отрыв происходит от боковой стенки диффузора, а в эксперименте – от верхней. Добавление нелинейных слагаемых (модель SST NL) несколько улучшает как предсказание положения отрыва, так и согласование с экспериментом по распределению коэффициента давления, однако различие по-прежнему остается весьма существенным. Наилучший результат демонстрирует модель BSL EARSM, которая качественно правильно предсказывает положение отрыва, однако форма отрывной области оказывается искаженной, что и приводит к ошибке в предсказании распределения коэффициента давления.

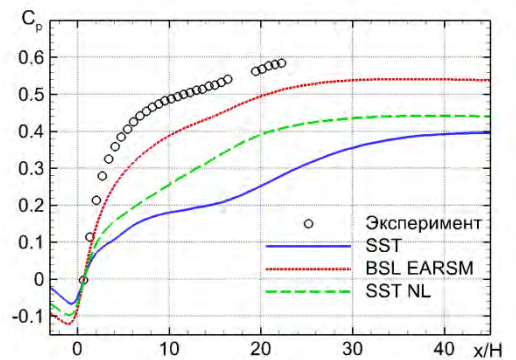


Рис. 39. Сравнение расчетных распределений безразмерного коэффициента давления с экспериментальными данными [236], [237].

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что, как и следовало ожидать, нелинейные модели не решают всех проблем, связанных с расчетом сложных отрывных течений, характеризующихся сильной анизотропией Рейнольдсовых напряжений. Тем не менее, даже в таких случаях они заметно превосходят по точности линейные модели.

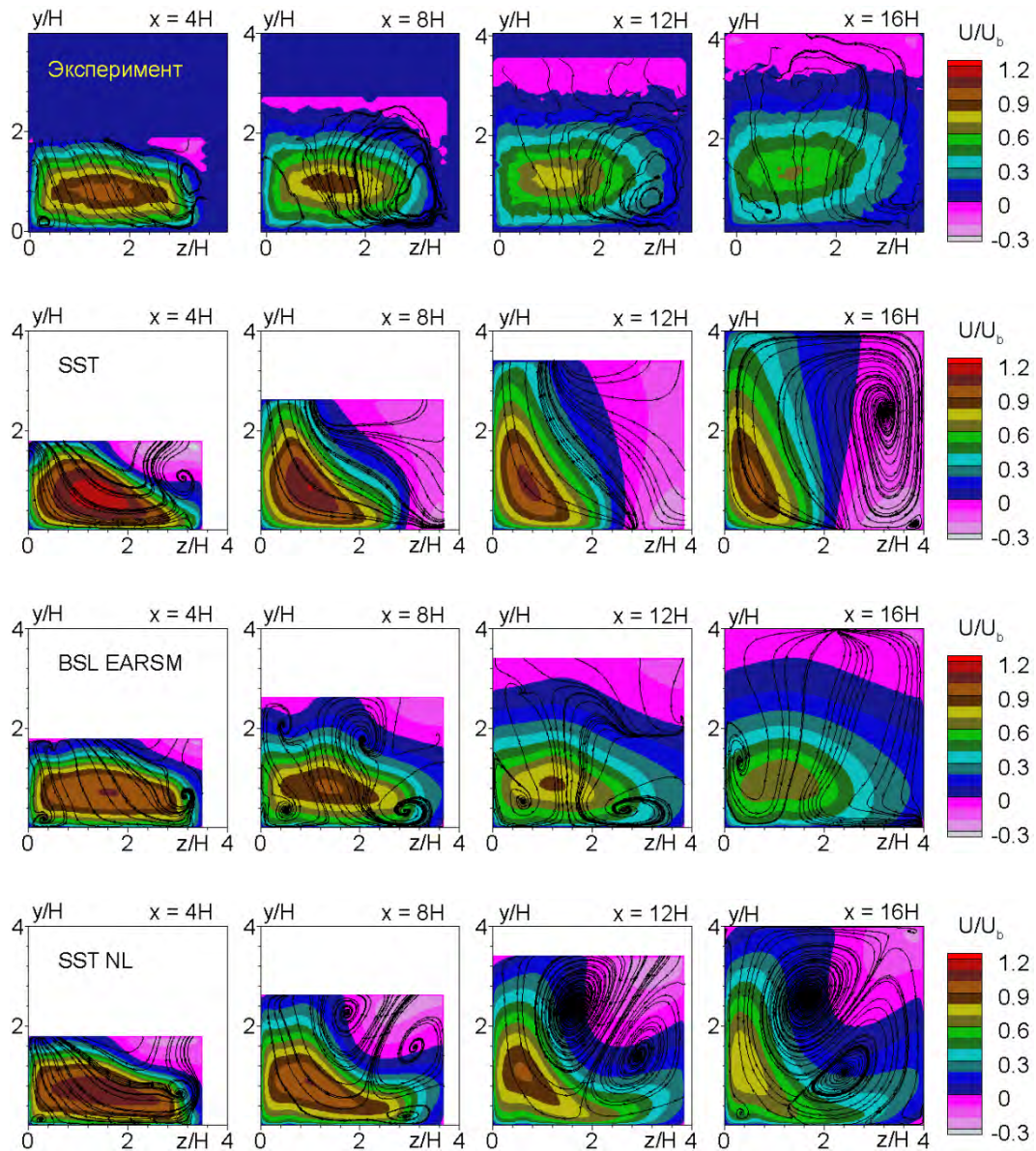


Рис. 40. Сравнение расчетных полей продольной составляющей вектора скорости с результатами измерений [236], [237] в различных сечениях диффузора.

2.3.1.3. Сверхзвуковое течение на начальном участке квадратного канала

Расчет данного течения позволяет провести тестирование предложенных моделей для расчета высокоскоростных потоков газа, имеющих место в задачах авиакосмической отрасли.

Постановка задачи

Постановка задачи о расчете этого течения соответствует условиям эксперимента [238]. В частности, число Рейнольдса, построенное по высоте канала $D = 25.4$ мм и скорости на его входе $U_0 = 674$ м/с (поток на входе в канал является однородным), составляло $5.08 \cdot 10^5$, число Маха на входе в канал равнялось 3.9, а давление и температура торможения p_s и T_s были равны 416 кПа и 300 К соответственно. Длина канала составляла $52D$.

На всей входной сверхзвуковой границе расчетной области, за исключением малой окрестности твердых стенок шириной $0.003D$, задавались однородные профили всех искомых переменных, а в пристеночной области профили скорости, турбулентной вязкости и кинетической энергии турбулентности изменялась от 0 на стенке до однородных значений, заданных в основной части входного сечения. При этом для скорости использовалась линейная зависимость от расстояния до стенки, а для турбулентных характеристик – квадратичная. Значение турбулентной вязкости ν_t на входе задавалось равным ν , а величина кинетической энергии турбулентности рассчитывалась по формуле $k = \omega/\nu_t$, где $\omega = 10 U_0/D$ [78].

В силу симметрии задачи относительно плоскостей, проходящих через середины его стенок, при ее решении использовалась расчетная область, представляющая собой один квадрант сечения канала, то есть прямоугольный параллелепипед размером $52D \times 0.5D \times 0.5D$ по координатам x , y и z , соответственно. Эта область покрывалась одноблочной декартовой сеткой с размером $218 \times 128 \times 128$.

Результаты расчетов

Полученные результаты представлены в безразмерной форме с использованием в качестве масштабов высоты канала D и скорости на его входе U_0 .

Результаты расчетов этого течения приведены на Рис. 41 - Рис. 44. Из распределения продольной скорости в центре канала (Рис. 41) видно, что начальный участок занимает примерно 35 – 40 высот канала D , после чего пограничные слои смыкаются, в результате чего скорость в центре канала начинает убывать существенно быстрее. Также на Рис. 41 отчетливо заметна не-монотонность величины продольной скорости в начале канала (при $x/D < 15$), причиной которой являются косые скачки уплотнения, возникающие из-за вытеснения потока пограничным слоем.

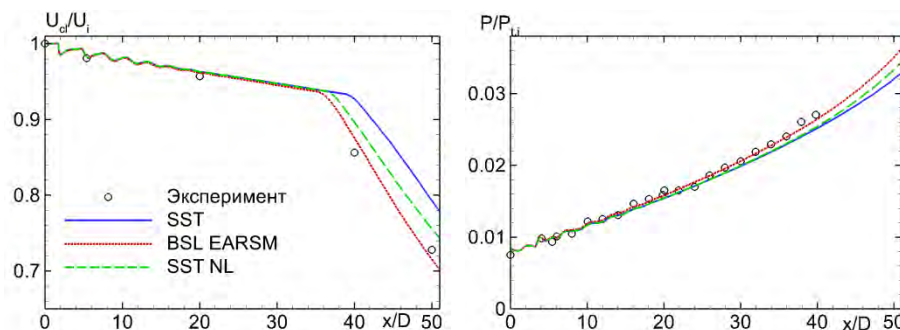


Рис. 41. Сравнение расчетных зависимостей скорости и давления торможения на оси канала от продольной координаты с экспериментом [238].

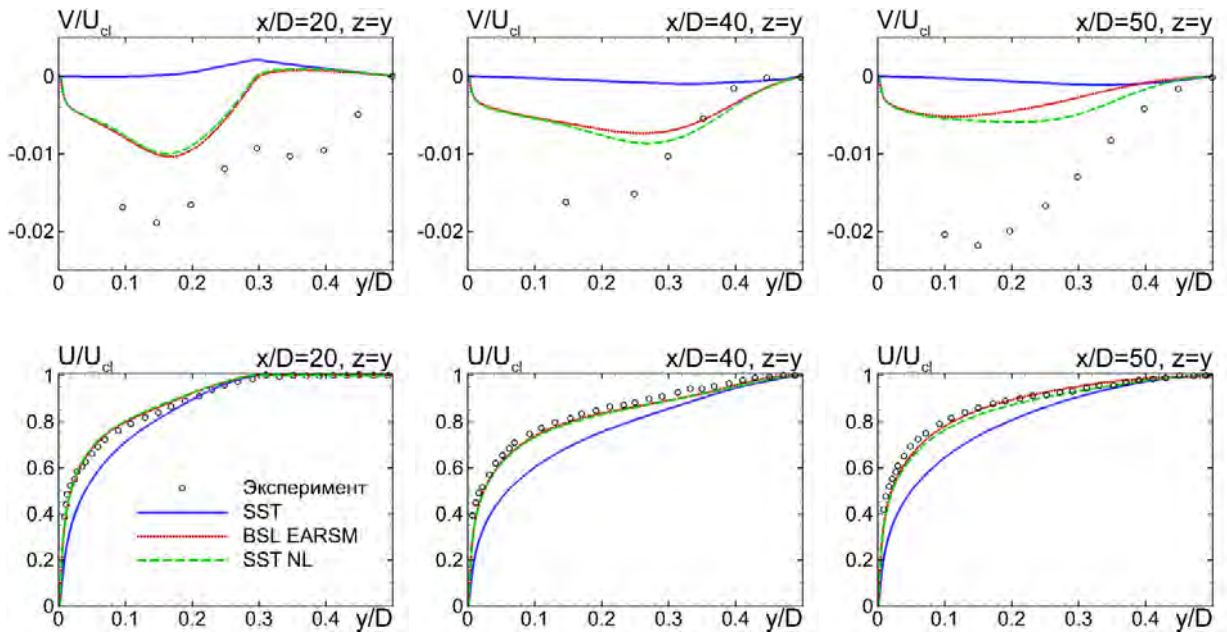


Рис. 42. Сравнение расчетных распределений поперечной и продольной скорости вдоль диагонали сечений $x/D = 20, 40$ и 50 с экспериментальными данными [238].

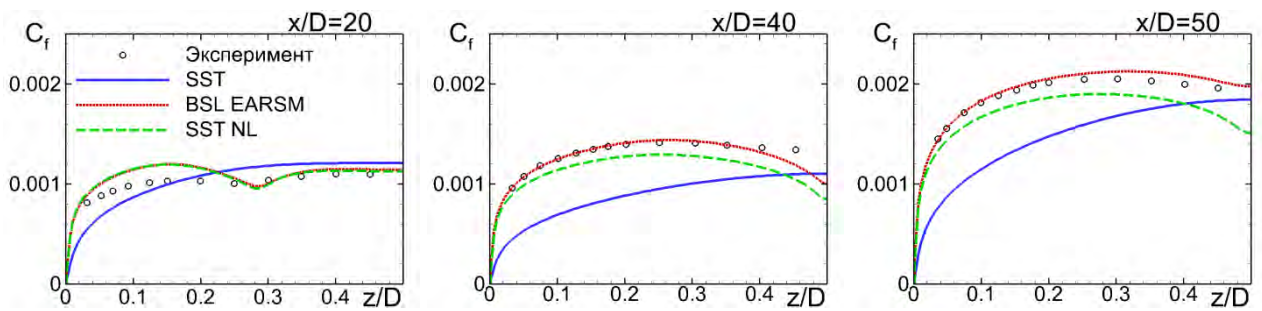


Рис. 43. Сравнение расчетных распределений коэффициента трения вдоль стенки канала в сечениях $x/D = 20, 40$ и 50 с экспериментальными данными [238].

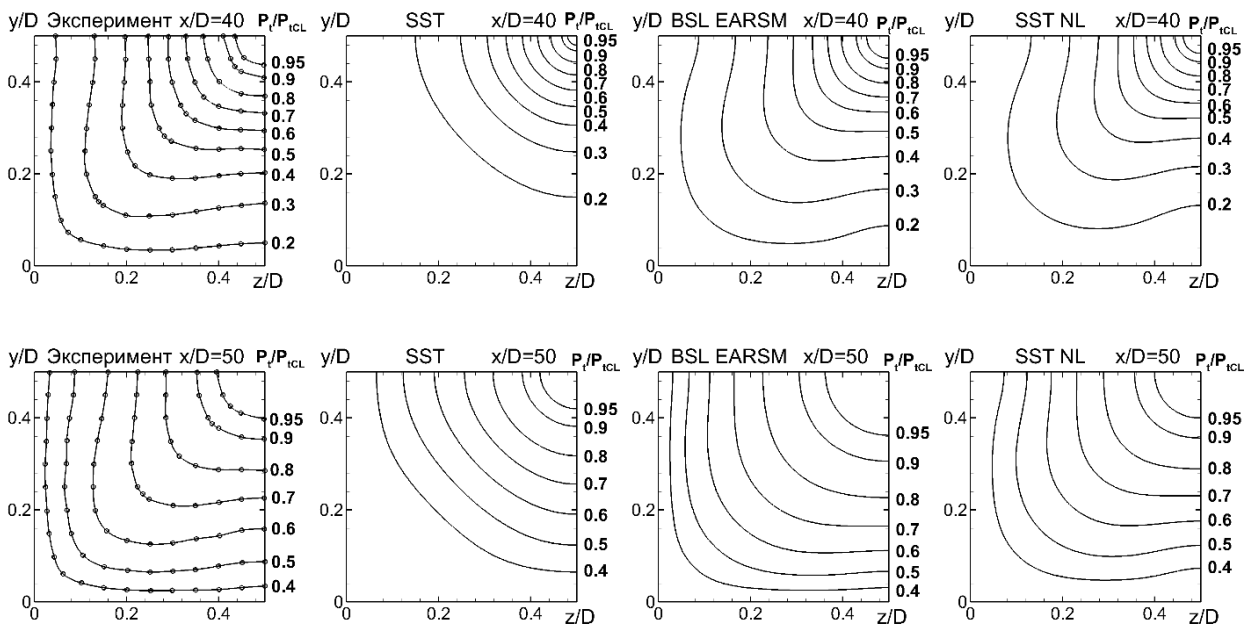


Рис. 44. Сравнение полей давления торможения в сечениях $x/D = 40$ и 50 , полученных в расчетах с использованием всех рассматриваемых моделей и в эксперименте [238].

Анализ распределения профилей поперечной компоненты скорости в различных сечениях канала вдоль его диагонали $y = z$ (Рис. 42, верхний ряд) свидетельствует о том, что, в отличие от линейной модели SST, нелинейные модели и предсказывают наличие вторичных токов как на начальном участке канала ($x/D = 20$), так и после смыкания пограничных слоев ($x/D = 40$ и $x/D = 50$). Хотя форма этих профилей и величина поперечной скорости существенно отличаются от результатов экспериментальных измерений, их наличие приводит к кардинальному улучшению точности предсказания распределений продольной скорости (Рис. 42, нижний ряд). Это, в свою очередь, ведет к существенно более точному предсказанию коэффициента трения во всех рассмотренных сечениях (Рис. 43) при помощи нелинейных моделей (похожая ситуация наблюдалась в развитом течении в квадратном канале, см. раздел 2.3.1.1).

Преимущества нелинейных моделей над линейной моделью SST особенно отчетливо проявляются в сечениях $x/D = 40$ и 50 , причем наилучшие результаты получаются с использованием модели BSL EARSM. Видно, что скорость и давление торможения на оси канала, полученные с использованием этой модели, лучше согласуются с экспериментальными данными по сравнению с результатами других моделей, причем наименее точные результаты получены с использованием линейной модели SST (Рис. 41). Сравнение полей давления торможения в тех же сечениях канала (Рис. 44) также наглядно демонстрирует превосходство нелинейных моделей: предсказываемые ими изолинии давления торможения хорошо согласуются с экспериментальными данными как по форме, так и по положению.

Таким образом, можно констатировать, что, как и для течения в асимметричном диффузоре, предложенные нелинейные модели BSL EARSM и SST NL намного превосходят по точности линейную модель SST, но даже они не способны обеспечить удовлетворительного предсказания всех характеристик данного течения.

2.3.1.4. Развитое течение в сборке тепловыделяющих элементов

Данная задача была выбрана для тестирования предложенных моделей, поскольку расчет охлаждения сборок тепловыделяющих элементов крайне важен для атомной энергетики.

Постановка задачи

В диссертации рассматривается две постановки задачи для развитого течения в сборке тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) (Рис. 45): с учетом боковых стенок сборки 5×5 , экспериментально исследованное в [239], и течение в бесконечной решетке стержней. Результаты расчетов по модели BSL EARSM сравниваются с результатами, полученными с использованием наиболее широко применяемых для подобных задач моделей, а именно моделей SST [57] и SA [54].

Постановка с учетом боковых стенок сборки

Рассматривается течение воды в сборке ТВЭЛ 5×5 стержней, экспериментальное исследование которого проводилось в рамках международного симпозиума по безопасности ядерных реакторов в 2012 году [239]. Число Рейнольдса, построенное по гидравлическому диаметру (D_H) и среднерасходной скорости (U_0), составляет $Re = 5 \cdot 10^4$, а число Прандтля $Pr = 7$ соответствует параметрам воды при среднерасходной температуре $T_0 = 293$ К.

Расчетная область соответствовала параметрам экспериментальной установки [239]: размер основного квадратного канала составлял $L = 7 \cdot D_H$, диаметр стержня ТВЭЛ – $D = 1.05 \cdot D_H$, расстояние между центрами соседних стержней – $P = 1.36 \cdot D_H$, а расстояние между стенкой канала и центром стержня – $W = 0.77 \cdot D_H$ (поперечное сечение сборки ТВЭЛ с указанием соответствующих размеров представлено на Рис. 45, слева).

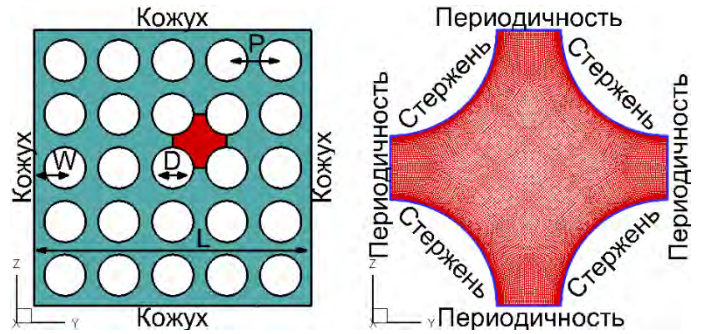


Рис. 45. Расчетная область и сетка для задачи о развитом течении в сборке ТВЭЛ для постановки с боковыми стенками и периодической постановки.

В направлении течения задавались периодические условия, а на твердых стенках – условия прилипания и постоянства температуры (T_w). Следует отметить, что, ввиду использования периодических условий в направлении течения, в уравнения баланса импульса и энергии, как и при решении задачи об установившемся течении в квадратном канале, добавлялись объемные источники для учета соответствующих перепадов давления и температуры.

При построении расчетной сетки в перпендикулярной направлению течения плоскости распределение узлов сетки задавалось так, чтобы обеспечить достаточное разрешение в центре канала (5% от минимального зазора между стержнями), а размер шага сетки в направлении течения равнялся минимальному размеру зазора между стержнями.

Периодическая постановка

Наряду с описанной выше постановкой задачи, соответствующей условиям эксперимента, данная задача была рассмотрена с использованием периодической постановки, соответствующей бесконечной в поперечном направлении сборке ТВЭЛ.

В рамках этой постановки расчетная область состояла из одной «ячейки» межстержневого канала (Рис. 45, справа), на границах которой в направлениях, перпендикулярных течению, задавались периодические граничные условия. Расчетная сетка в данной ячейке совпадала с сеткой, используемой в соответствующих областях в рамках постановки задачи, описанной выше. Периодическая постановка является вполне оправданной для центральных (удаленных от стенок)

межстержневых каналов, а размер требуемых вычислительных сеток, оказывается гораздо меньше, чем для постановки, включающей боковые стенки. Это позволило провести с ее помощью расчеты не только методом RANS, и с использованием вихреразрешающего подхода IDDES¹¹ [174]. Сравнение с результатами IDDES дало возможность оценить точность RANS моделей при расчете течения в удаленных от стенок каналах не только для скорости и кинетической энергии турбулентности, но и, что не менее важно, для температуры, измерения которой в эксперименте не проводились.

При проведении IDDES сетка в поперечной плоскости расчетной области была такой же, как в RANS расчетах (см. Рис. 45), поскольку она полностью удовлетворяла требованиям к сеткам для IDDES [173]. Размер расчетной области в продольном направлении составлял $4D_H$, а шаг сетки был примерно равен 10% от величины минимального зазора между стержнями. Шаг интегрирования по времени составлял $\Delta t = 0.006 \cdot D_H / U_0$.

Результаты расчетов

Постановка с учетом боковых стенок сборки

На Рис. 46 представлены поля скорости и кинетической энергии турбулентности в поперечном сечении сборки, полученные с использованием BSL EARSM. Видно, что в зависимости от взаимного расположения рассматриваемой точки потока и боковых стенок в этих полях можно выделить три характерных типа течения, соответствующих центральным межстержневым каналам (цифры **1, 2, 3** на рисунке), пристеночным каналам (**4, 5**) и угловым каналам (**6**). Во всех центральных каналах наблюдается сходная картина течения с ярко выраженными максимумами скорости и минимумами кинетической энергии турбулентности в центре, в то время как в пристеночных и в угловых каналах наблюдается значительное замедление потока и уменьшение кинетической энергии турбулентности.

Экспериментальные измерения компонент скорости и кинетической энергии турбулентности доступны в сечениях $y/P = 0.5$ и 2.5 , показанных линиями на Рис. 46.

Сравнение экспериментальных и расчетных профилей скорости, полученных с использованием SA, SST и BSL EARSM моделей в этих сечениях (Рис. 47), свидетельствует о том, что наилучшее совпадение с экспериментом обеспечивает модель BSL EARSM, предложенная в диссертации. То же относится и к профилям кинетической энергии турбулентности (Рис. 48), хотя

¹¹ Описание метода SST IDDES представлено в разделе 3.1.1 настоящей диссертации, а описание используемых при его применении численных методов – в разделе 3.2.

даже при использовании этой модели максимальное отклонение от экспериментальных значений, наблюдаемое в пристеночном сечении, достигает 50%.

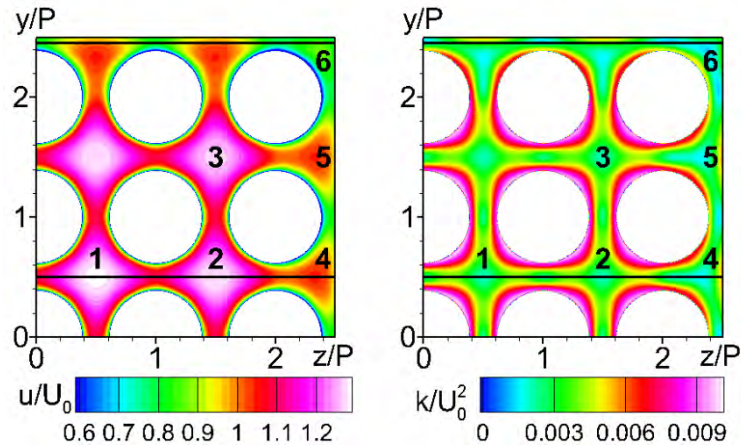


Рис. 46. Поля скорости и кинетической энергии турбулентности для сборки ТВЭЛ, рассчитанные с помощью EARSM (цифрами указаны номера межстержневых каналов).

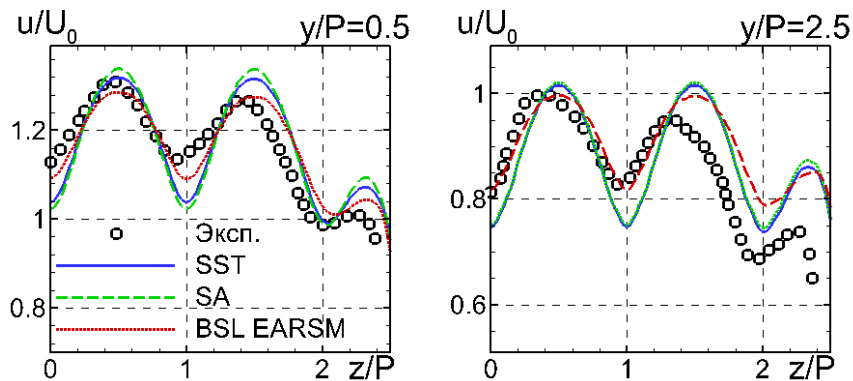


Рис. 47. Профили скорости в сечениях $y/P = 0.5, 2.5$.

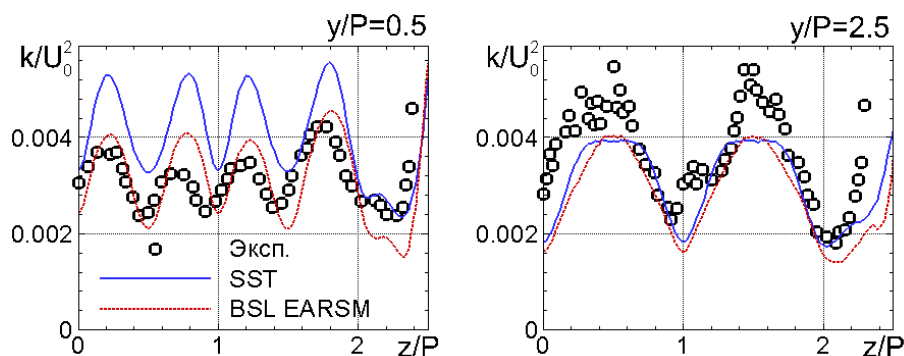


Рис. 48. Профили кинетической энергии турбулентности в сечениях $y/P = 0.5, 2.5$.

Периодическая постановка

Результаты расчетов течения в периодической постановке (Рис. 49 - Рис. 51) также свидетельствуют о том, что BSL EARSM предсказывает характеристики рассматриваемого течения существенно точнее, нежели модели SA и SST. В частности, эти модели, в отличие от BSL EARSM, существенно завышают амплитуду колебаний скорости и температуры вдоль среднего

сечения (Рис. 49) и менее точно предсказывают профили скорости и температуры в «узком» (Рис. 50) и «широком» (Рис. 51) сечениях по нормали к поверхности ТВЭЛ.

В целом представленные результаты свидетельствуют о том, что при расчете рассматриваемого течения модель BSL EARSМ заметно превосходит наиболее популярные линейные RANS модели и обеспечивает приемлемую для практики точность расчетов.

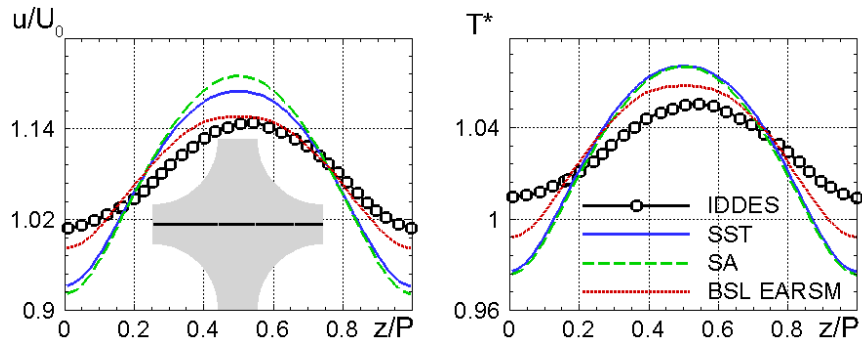


Рис. 49. Профили скорости и температуры в центральном сечении межстержневого канала.

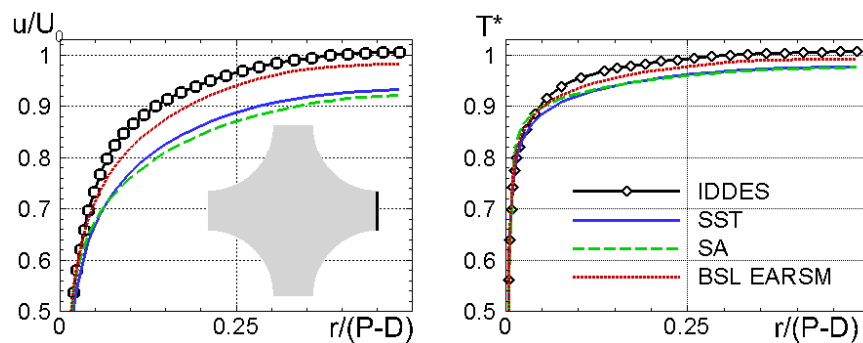


Рис. 50. Профили скорости и температуры в узком сечении межстержневого канала.

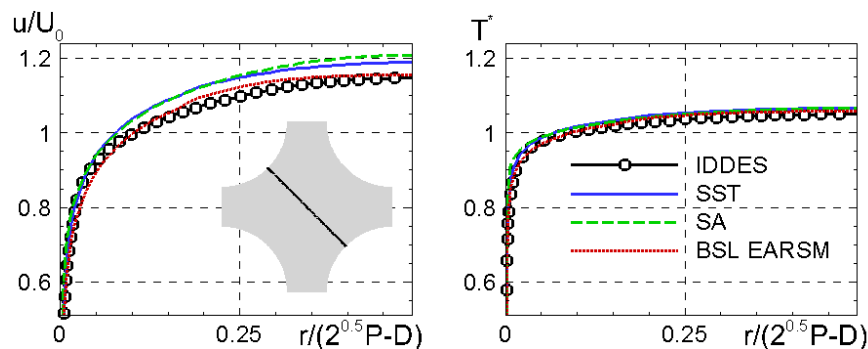


Рис. 51. Профили скорости и температуры в широком сечении межстержневого канала.

2.3.1.5. Транзвуковое обтекание модели самолета DLR F-6

Данное течение было впервые предложено в качестве тестовой задачи для валидации моделей турбулентности на рабочем семинаре «2nd AIAA Drag Prediction Workshop» [240] и впоследствии использовалось и продолжает использоваться для этой цели в большом числе работ (см.,

например, [44], [241], [242]). Учитывая это, а также то обстоятельство, что расчет обтекания самолета представляет непосредственный практический интерес для авиационной промышленности, данный тест был привлечен в настоящей работе для оценки точности модели BSL EARSМ.

Постановка задачи

Рассматривается трансзвуковое обтекание модели самолета при числе Маха $M = 0.75$ и числе Рейнольдса, построенном по скорости набегающего потока и средней хорде крыла, равном $Re = 3 \cdot 10^6$. Соответствующие эксперименты были проведены в ONERA [240] (верхняя рамка на Рис. 52). В диссертации представлены результаты расчетов варианта с мотогондолой при угле атаки 1° (в этом режиме коэффициент подъемной силы составляет примерно 0.5) с использованием моделей SST и BSL EARSМ.

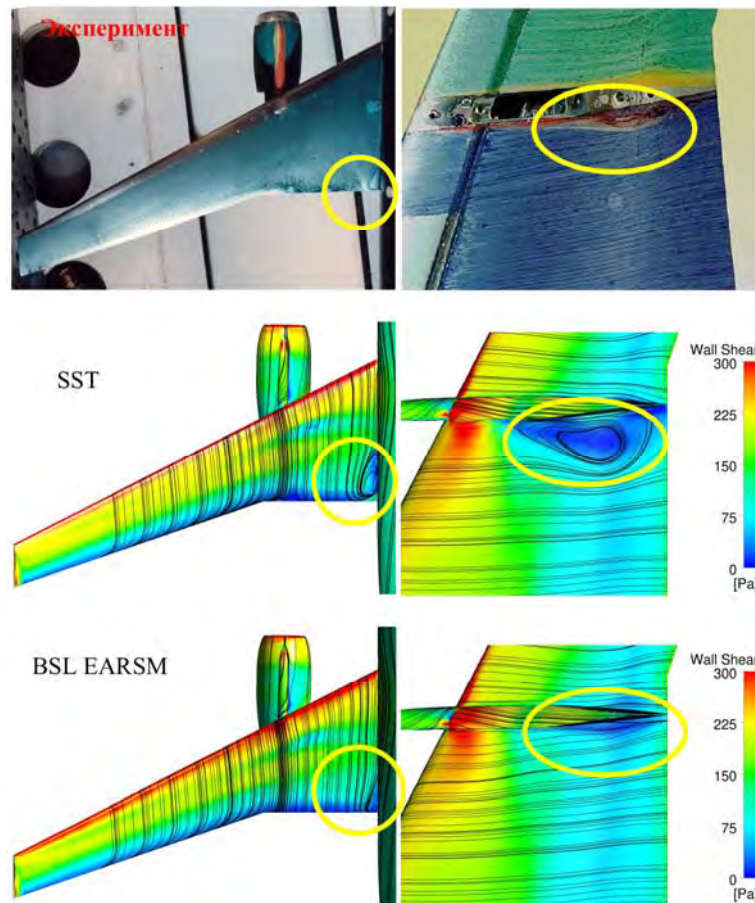


Рис. 52. Отрывная зона на сочленении крыла и фюзеляжа (левая колонка) и на сочленении крыла и пилонa мотогондолы (правая колонка). Верхний ряд – эксперимент [240], средний ряд – модель SST, нижний ряд – модель BSL EARSМ.

Результаты расчетов

Сравнение расчетных и экспериментальных поверхностных линий тока и распределений коэффициента трения приведено на Рис. 52. Видно, что SST модель существенно завышает размер отрывной зоны как на сочленении крыла и фюзеляжа, так и на сочленении крыла и пилонa

мотогондолы. В то же время размер этих зон, предсказываемый моделью BSL EARSM, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

2.3.2. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ SST RC1

2.3.2.1. Течение в плоском вращающемся канале

Эта задача является каноническим тестом на способность моделей турбулентности адекватно воспроизводить влияние вращения потока на турбулентность.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале, вращающемся относительно поперечной оси z (Рис. 53) при условиях, для которых выполнены DNS расчеты [243].

Приводящий жидкость в движение градиент давления, как и в установившемся течении в квадратном канале (раздел 2.3.1.1), задавался в виде равномерно распределенного в пространстве объемного источника в проекции уравнения переноса импульса на ось x . Величина этого источника подбиралась для каждой модели турбулентности таким образом, чтобы при отсутствии вращения число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости U_b и полувысоте канала h , составляло $Re = U_b \cdot h / \nu = 5.8 \cdot 10^3$. Эти же величины источника использовались и при наличии вращения. Расчеты были выполнены для различных скоростей вращения канала Ω , которые соответствовали числам Россби $Ro = \Omega \cdot h / U_b = 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ (именно такие режимы рассматривались в работе [243]).

В рассматриваемом течении величины скорости и турбулентных характеристик зависят только от поперечной координаты y , т.е. рассматриваемая задача является одномерной. Для ее решения использовалась двумерная область с размером в продольном направлении равным одной высоте канала и периодическими граничными условиями (размер расчетной сетки был равен 3×137).

Результаты расчетов

Как видно из Рис. 54, при всех рассматриваемых значениях числа Россби предложенная в настоящей работе (раздел 2.1.3) поправка к модели SST, учитывающая вращение потока (модель SST RC1), обеспечивает чуть лучшее согласование профилей скорости с результатами DNS, чем известная поправка SST RC [100]. Кроме того, из этого рисунка следует, что в профиле турбулентной вязкости при $Ro = 0.5$, рассчитанном с использованием предложенной поправки, отсутствует ложный пик в окрестности максимума скорости, предсказываемый моделью [100].

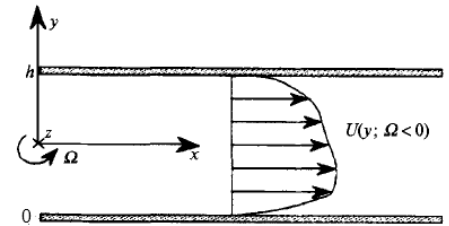


Рис. 53. Схема рассматриваемого течения (из [243]).

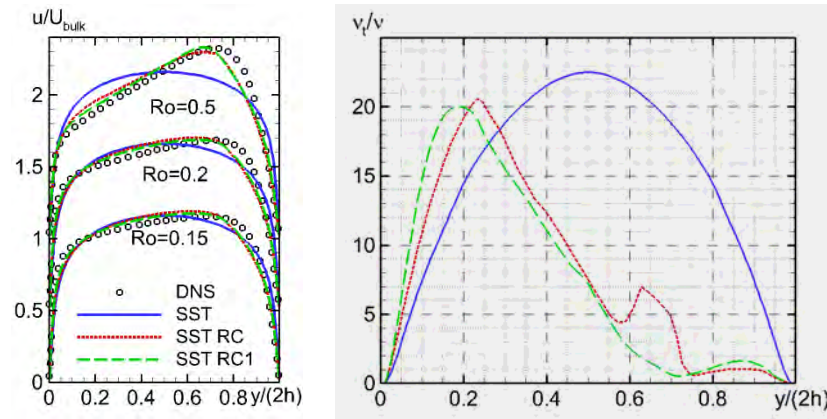


Рис. 54. Сравнение профилей скорости во вращающемся канале при $Ro=0.15, 0.2, 0.5$ с результатами DNS (слева) и профили турбулентной вязкости при $Ro=0.5$ (справа), рассчитанные с использованием стандартной модели SST, модели SST RC [100] и предлагаемой модели SST RC1.

2.3.2.2. Течение в плоском канале с поворотом на 180°

Данное течение является популярным тестом для оценки способности RANS моделей описывать влияние кривизны линий тока на турбулентность.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале с поворотом на 180° (Рис. 55), экспериментальное исследование которого выполнено в работе [244] при числе Рейнольдса, построенном по высоте канала H и среднерасходной скорости U_m , $Re = U_m H / \nu = 10^6$.

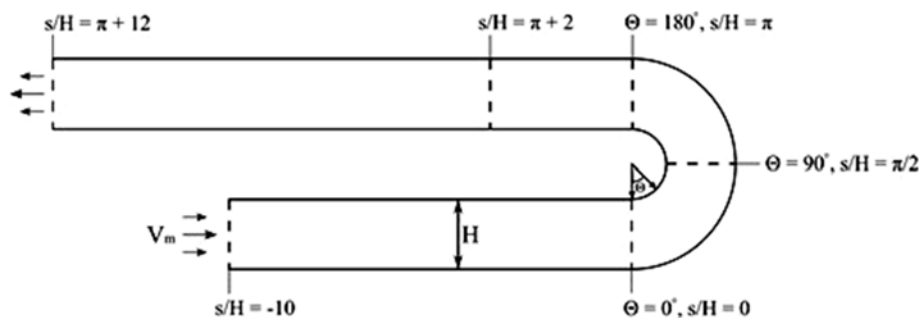


Рис. 55. Схема течения с поворотом на 180° .

Расчетная область, показанная на Рис. 56, включала участок канала вверх по потоку от поворота, сам поворот и участок канала вниз по потоку от него, а использовавшаяся одноблочная расчетная сетка, также показанная на Рис. 56, содержала 203×111 ячеек.

На входной границе расчетной области задавались профили всех переменных, полученные из предварительных расчетов установившегося течения в плоском прямолинейном канале при помощи всех рассматриваемых моделей. Это соответствует условиям эксперимента, в котором экспериментальная секция имела длинный предвключенный прямолинейный участок.

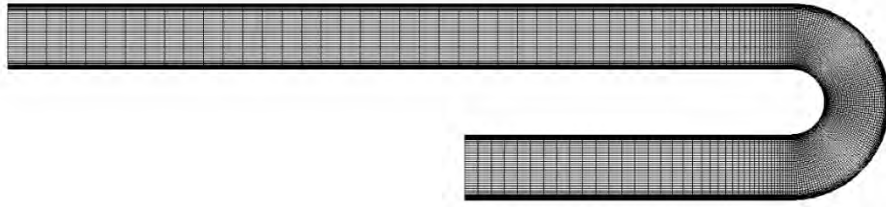


Рис. 56. Расчетная область и сетка.

Результаты расчетов

Сравнение с экспериментом [244] проводилось в трех поперечных сечениях канала: в начале поворота ($\theta = 0^\circ$), в его середине ($\theta = 90^\circ$) и в конце ($\theta = 180^\circ$). Как видно из Рис. 57, профили скорости, рассчитанные с использованием моделей SST RC и SST RC1 практически идентичны и хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Таким образом, на основе выполненных тестов можно сделать вывод о том, что для пристеночных пограничных слоев, подверженных влиянию вращения и кривизны линий тока, предложенная поправка не уступает по точности поправке [100] и даже несколько ее превосходит.

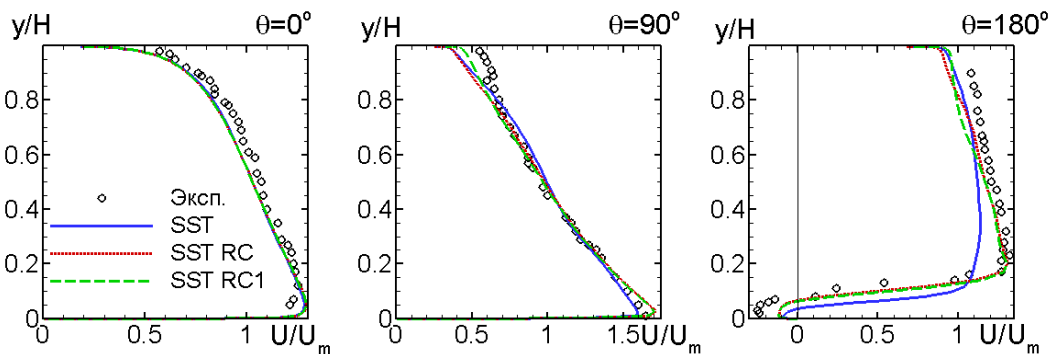


Рис. 57. Сравнение с экспериментом профилей расходной составляющей скорости в трех сечениях канала, рассчитанных с использованием стандартной модели SST, модели SST RC [100] и предложенной модели SST RC1.

2.3.2.3. Изолированный автомодельный вихрь

Данное течение, являющееся турбулентным аналогом известной задачи об изолированном ламинарном вихре, недавно было предложено в работе [245] в качестве простого теста для оценки способности моделей турбулентности правильно предсказывать свойства вихревых течений.

Постановка задачи

Рассматривается развитие во времени двумерного осесимметричного изолированного вихря при высоком значении числа Рейнольдса. При стремлении времени к бесконечности данное течение становится автомодельным (турбулентным или ламинарным), причем все его турбулентные характеристики зависят только от двух размерных величин, а именно циркуляции Γ и времени жизни t . На автомодельной стадии турбулентного течения в распределении циркуляции

по радиусу вихря в расчетах возникает максимум, который не наблюдается в эксперименте [246], в связи с чем физически обоснованным является ламинарное состояние вихря на этой стадии. Иными словами, степень отличия величины турбулентной вязкости в автомодельном решении от нуля может служить критерием применимости той или иной модели для расчета вихревых течений.

Поскольку NTS код не имеет осесимметричной версии, расчет данного течения проводился в области, представляющей собой сектор, размер которого в азимутальном направлении был выбран равным 4° , а на границах сектора использовались условия периодичности. Во избежание сингулярности на оси симметрии в ее окрестности располагался тонкий (с радиусом 10^{-4} от начального радиуса вихря r_0) цилиндр, на поверхности которого использовались граничные условия свободного скольжения.

Размер расчетной области в радиальном направлении составлял $r_{out} = 100 \cdot r_0$. На ее границе радиальная компонента скорости полагалась равной 0, а азимутальная определялась соотношением $U_\theta = \Gamma/2\pi r_{out}$.

Сетка в радиальном направлении была неравномерной (ее шаг увеличивался от оси к внешней границе области с коэффициентом 1.02). Сетка в азимутальном направлении содержала 5 узлов (это необходимо для сохранения третьего порядка разностной схемы). В результате полный размер сетки составлял 450×5 .

В начальный момент распределение скорости определялось следующим выражением

$$u_r = 0, u_\theta = \left(1 - \exp\left(-\left(r/r_0\right)^2\right)\right) \cdot \Gamma/2\pi r,$$

а турбулентные характеристики рассчитывались по приведенным ниже формулам

$$v_t = \max\left[K_v \Gamma \left(1 - \left(r/r_0\right)^2\right), 10^{-3} v\right], \omega_t = \exp\left(-\left(r/r_0\right)^2\right) \cdot \Gamma / \left(\pi r_0^2\right), K_t = v_t \omega_t.$$

Коэффициент K_v зависел от используемой модели турбулентности и определяется из предварительных расчетов. Развитое течение не зависит от этого параметра, однако его значение влияет на время выхода решения на автомодельную стадию.

Число Рейнольдса, построенное по циркуляции, составляло $Re = \Gamma/v = 10^5$ (при столь высоких значениях автомодельное решение перестает зависеть от числа Рейнольдса). Шаг интегрирования по времени был равен $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} r_0^2 / \Gamma$, а общее время расчета составляло $T = 5 \cdot 10^3 r_0^2 / \Gamma$ (как показано в [245] этого времени достаточно для получения автомодельного решения).

Результаты расчетов

Как и ожидалось, автомодельное решение, полученное с использованием модели SST, оказалось турбулентным, а расчеты с обеими поправками привели к ламинаризации решения, вследствие чего в решениях, полученных с их помощью, отсутствует нефизичный пик в распределении циркуляции по радиусу вихря (Рис. 58). Следует отметить, что турбулентная вязкость в расчете с моделью SST RC1 снижается от начального значения намного быстрее, чем в случае использования модели SST RC [100], что свидетельствует о ее большей эффективности.

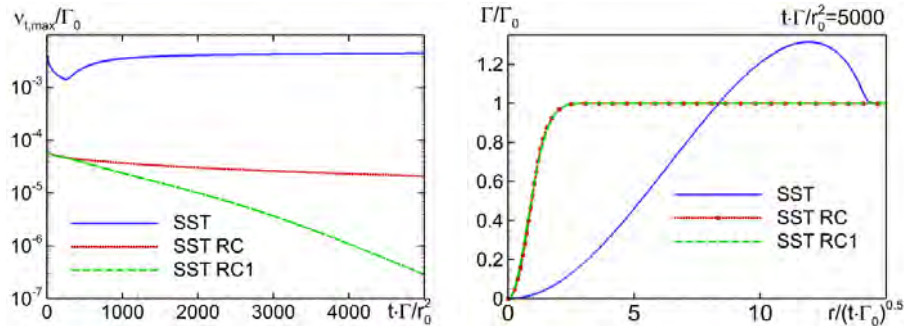


Рис. 58. Влияние модели турбулентности на зависимость от времени безразмерной турбулентной вязкости на распределение циркуляции по радиусу на автомодельной стадии решения.

2.3.2.4. Концевой вихрь крыла конечного размаха

Концевой вихрь является неотъемлемым элементом обтекания крыла самолета, и определение времени его жизни чрезвычайно важно для обеспечения безопасности полетов. В связи с этим данная задача представляет большой практический интерес.

Постановка задачи

Для тестирования предложенной в диссертации модели SST RC1 с ее помощью была рассчитана эволюция концевой вихря, формирующегося при обтекании установленной в аэродинамической трубе секции крыла NACA0012 со скругленной боковой кромкой (Рис. 59), которое исследовалось в экспериментах [246].

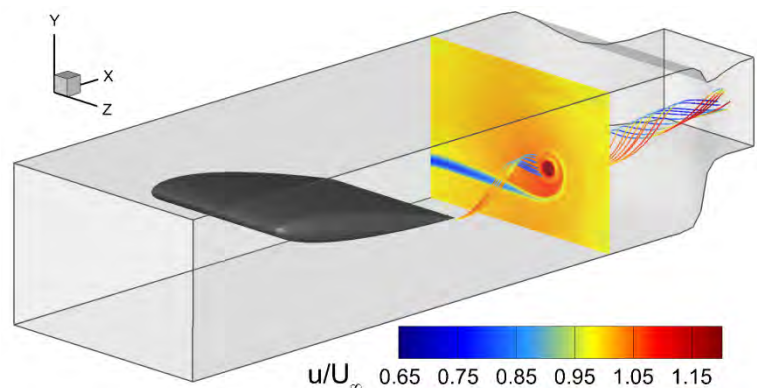


Рис. 59. Схема обтекания секции крыла NACA0012, а также линии тока и поле скорости из SST RC1 RANS расчета.

Расчеты проводились в несжимаемой постановке при числе Рейнольдса, построенном по скорости набегающего потока U_∞ и хорде крыла c , $Re = U_\infty c/\nu = 3.568 \cdot 10^6$, что соответствует

условиям эксперимента. На входе в расчетную область задавался однородный поток, в котором кинетическая энергия турбулентности соответствовала экспериментальному значению, а величина удельной диссипации вычислялась по формуле $\omega = 10 U_\infty/c$ [78]. Расчеты проводились на блочно-структурированной сетке типа «химера», состоявшей из 7 блоков общим размером 5.6 миллионов ячеек.

Результаты расчетов

На Рис. 60 приведены профили продольной и окружной компонент скорости (U/U_∞ и $U_{CF} = \sqrt{v^2 + w^2}/U_\infty$, соответственно) в плоскостях $x = 0$ (задняя кромка крыла), $0.24c$ и $0.68c$ вдоль горизонтальных линий, проходящих через центр концевое вихря. Из рисунка видно, что при расчете данного течения стандартная модель SST оказывается совершенно непригодной (приводит не только к большим количественным погрешностям, но и к качественно неверным результатам), модель SST RC [100] обеспечивает лишь качественно правильное описание эволюции вихря вниз по потоку. В противоположность этому, предложенная в диссертации модель SST RC1, позволяет описать этот процесс с высокой степенью точности. Эти выводы полностью согласуются с выводами относительно возможностей рассматриваемых моделей, сделанными на основе анализа результатов простого теста, представленного в предыдущем разделе. Успех модели SST RC1 объясняется тем, что она обеспечивает быстрое падение турбулентной вязкости (см. Рис. 61) и тем самым обеспечивает медленную диссипацию вихря, наблюдаемую в эксперименте.

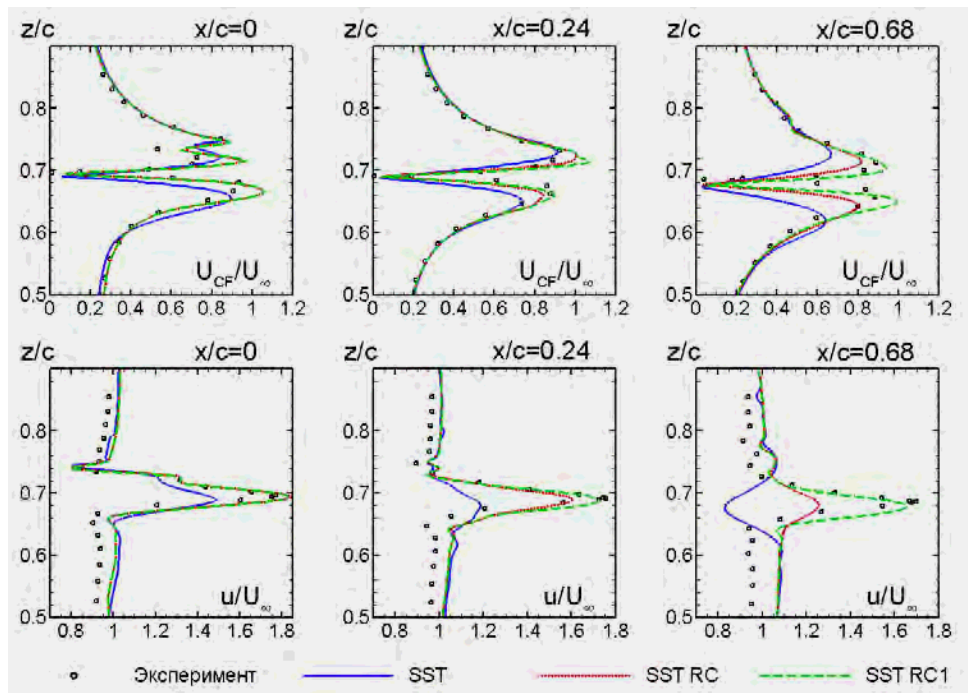


Рис. 60. Профили окружной и продольной скорости в трех сечениях вихря: $x = 0, 0.24c$ и $0.68c$.

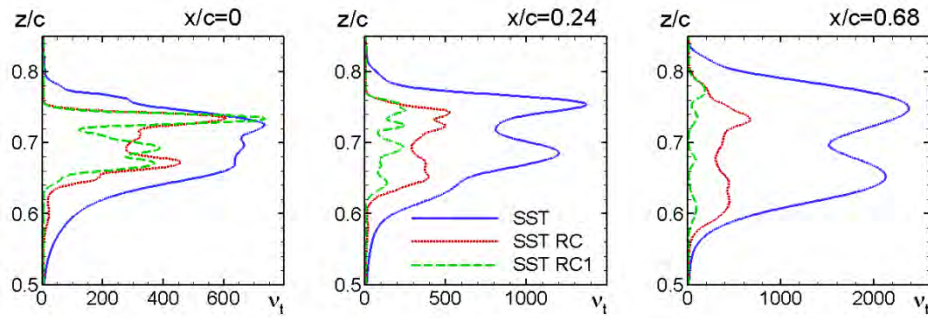


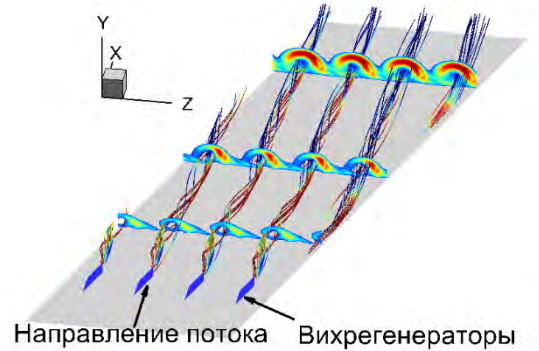
Рис. 61. Профили турбулентной вязкости в трех сечениях вихря: $x = 0, 0.24c$ и $0.68c$.

2.3.2.5. Обтекание системы механических вихрегенераторов в сверхзвуковом пограничном слое

Механические вихрегенераторы широко используются для управления пограничным слоем и, в частности, применяются для предотвращения его отрыва от обтекаемой поверхности. В связи с этим, данное течение, как и течение, рассмотренное в предыдущем разделе, представляет непосредственный практический интерес.

Постановка задачи

Рассматривается течение, которое было рассчитано в работе [247] с использованием DNS. Бесконечная в направлении z система вихрегенераторов установлена в пограничном слое на плоской поверхности, имеющем толщину h . (см. Рис. 62). Высота вихрегенераторов также равна h , их длина составляет $4h$, а расстояние между ними равно $5h$. Набегающий сверхзвуковой поток направлен под углом 18° к вихрегенераторам. Число Рейнольдса, построенное по скорости внешнего потока и высоте вихрегенератора, равно 10^4 .



Направление потока Вихрегенераторы
Рис. 62. Схема течения в пограничном слое за системой вихрегенераторов, линии тока и поля завихренности в нескольких сечениях из SST RC1 расчета.

Задача рассматривалась в периодической постановке вдоль оси z с периодом $L_z = 5h$. Размер расчетной области в направлении осей x и y составлял $60.5h$ ($10.5h$ вверх по потоку и $60h$ вниз по потоку от передней кромки вихрегенераторов) и $20h$, соответственно. На входной границе задавались профили скорости, полученные из расчета пограничного слоя на плоской пластине с использованием модели SST. Для решения задачи использовалась одноблочная неравномерная расчетная сетка размером $679 \times 107 \times 102$ (общий размер был примерно равен 7.4 миллиона узлов).

Результаты расчетов

На Рис. 63 представлено сравнение продольных распределений циркуляции и максимальной завихренности вниз по потоку от вихрегенераторов, рассчитанных с использованием трех

рассматриваемых RANS моделей, с соответствующими результатами DNS. Видно, что, хотя модель SST RC1 заметно превосходит по точности оригинальную версию модели SST и обеспечивает чуть лучшее согласование с результатами DNS, чем модель SST RC, даже она предсказывает значительно более быструю диссипацию вихрей, чем DNS.

Это связано с тем, что даже при использовании данной модели величина турбулентной вязкости в центре вихря, находящегося внутри пограничного слоя, остается достаточно высокой (см. Рис. 64).

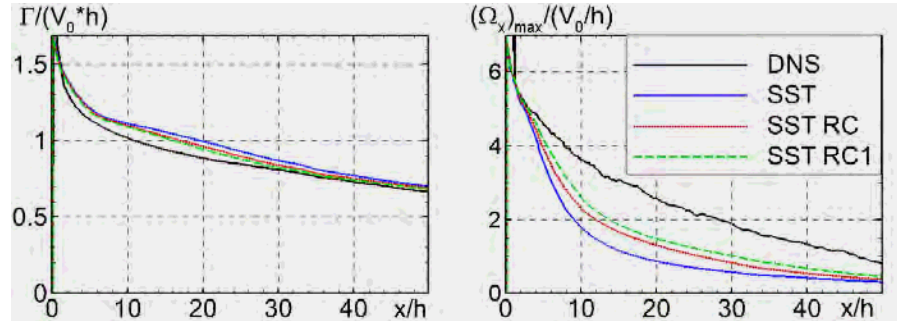


Рис. 63. Эволюция циркуляции и максимальной завихренности вниз по потоку от вихрегенераторов.

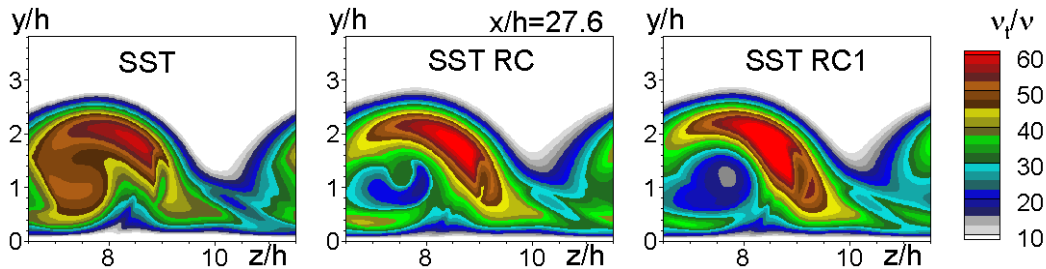


Рис. 64. Поля турбулентной вязкости в сечении $x/h = 27.6$ вниз по потоку от вихрегенераторов.

Суммируя представленные в разделах 2.3.2.1 – 2.3.2.5 результаты тестирования модели SST RC1, можно заключить, что во всех рассмотренных течениях эта модель значительно превосходит по точности не только оригинальную модель SST, но и в большей или меньшей степени, модель SST RC, предложенную ранее для расчета течений данного класса. Наряду с этим приходится констатировать, что для некоторых из рассмотренных течений, в частности, для обтекания системы вихрегенераторов, точность, обеспечиваемая моделью SST RC1, также оказывается недостаточной.

2.3.3. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ SST HL

В данном разделе представлены результаты тестирования модели SST HL (раздел 2.1.4), которая была предложена для повышения точности расчета обтекания прямых крыльев при больших (близких к критическим) значениях угла атаки.

Постановка задачи

Для оценки эффективности данной модели результаты серии расчетов, полученные с ее использованием в широком диапазоне углов атаки, сравнивались с экспериментальными данными

по обтеканию различных прямых крыльев конечного размаха (Табл. 1). Эти данные были получены в аэродинамических трубах прямоугольного сечения с низким уровнем турбулентности ($Tu < 1\%$) при относительно высоких ($Re = U_\infty c / \nu \geq 10^6$) числах Рейнольдса, построенных по скорости набегающего потока U_∞ и хорде профиля c . Во всех экспериментах производились измерения давления в различных точках на поверхности крыла в плоскости, лежащей вблизи его центрального сечения, а коэффициент подъемной силы определялся путем интегрирования измеренного давления.

Табл. 1. Рассматриваемые профили и параметры аэродинамических труб в экспериментах.

| Крыло | Относительная толщина | Переход к турбулентности | Высота трубы | Размах крыла | $Re, U_\infty c / \nu$ | Источник |
|-------------|-----------------------|--------------------------|--------------|--------------|------------------------|----------|
| A-Airfoil | 16.10% | Естественный | $3c$ | $2.3c$ | $2.1 \cdot 10^6$ | [213] |
| S805 | 13.50% | Вынужденный | $3.6c$ | $2.5c$ | $1.0 \cdot 10^6$ | [248] |
| S825 | 17.10% | Вынужденный | $5c$ | $2c$ | $2.0 \cdot 10^6$ | [249] |
| S809 | 21.00% | Вынужденный | $3c$ | $2c$ | $2.0 \cdot 10^6$ | [250] |
| S814 | 24.00% | Вынужденный | $2.76c$ | $1.92c$ | $1.5 \cdot 10^6$ | [251] |
| DU-97-W-300 | 30.00% | Естественный | $3c$ | $2c$ | $3.0 \cdot 10^6$ | [252] |

Для крыльев с профилями S805, S809, S825 и S814 в экспериментах ламинарно-турбулентный переход инициировался с помощью турбулизаторов, установленных вблизи передней кромки крыла (в расчетах обтекание этих крыльев предполагалось полностью турбулентным). Для крыльев DU-97-W-300 и A-Airfoil турбулизаторы в экспериментах не использовались и на них происходил естественный ламинарно-турбулентный переход.

Поскольку число Маха в экспериментах не превышало 0.2, все расчеты проводились в несжимаемой постановке. Расчетная область представляла собой прямоугольный параллелепипед, размеры которого соответствовали размеру рабочей секции аэродинамической трубы. Для удобства построения сеток при различных углах атаки расчетная область была разбита на две подобласти, первая из которых (вокруг крыла) имела цилиндрическую форму, а вторая включала остальную часть параллелепипеда (Рис. 65).

На стенках аэродинамической трубы использовались граничные условия скольжения (также называемые условиями симметрии). Кинетическая энергия турбулентности на



Рис. 65. Расчетная область и граничные условия.

входной границе задавалась так, чтобы интенсивность турбулентности соответствовала экспериментальной, при этом удельная скорость диссипации определялась соотношением: $\omega = 10 U_0/c$ [78].

Так как для крыльев DU-97-W-300 и A-Airfoil турбулизаторы в эксперименте не использовались, при расчете этих течений необходимо было учитывать ламинарно-турбулентный переход. Расчеты этих течений проводились с использованием модели перехода γ -SST [216] и ее соответствующей модификации γ -SST HL.

Шаги используемых расчетных сеток (Рис. 66) измельчались в областях потока, наиболее чувствительных к качеству сетки: в окрестности передней кромки для разрешения формирующегося тонкого пограничного слоя и в окрестности области ламинарно-турбулентного перехода, в случае его предсказания при помощи модели перехода. На границе раздела неподвижной и вращающейся подобластей шаг сетки составлял 1° , что обеспечивало соответствие сеток при целочисленных углах атаки. Размер сетки зависел от рассматриваемого профиля и составлял от 5 до 15 миллионов ячеек. Выборочные расчеты на измельченных сетках показали, что сетки, использованные в основной серии расчетов, обеспечивали сеточно-независимое решение.

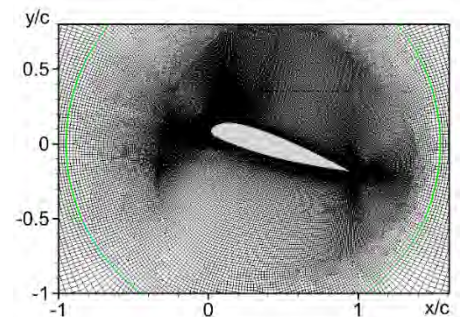


Рис. 66. Пример расчетной сетки в окрестности крыла с профилем A-airfoil при угле атаки $\alpha=16^\circ$.

Результаты расчетов

Результаты расчетов показали, что структура рассматриваемого течения существенно зависит от формы крыла и угла атаки. При малых углах атаки, пока отсутствует отрыв от верхней стороны крыла (стороны разрежения), течение остается двумерным. Возникающая с увеличением угла атаки отрывная зона теряет устойчивость в направлении размаха крыла (подробнее об этом см. в разделе 5.3.2.3), что приводит к появлению трехмерной «грибообразной» структуры в зоне отрыва. При увеличении угла атаки в зависимости от формы крыла можно выделить три основных сценария развития трехмерных вихревых структур на стороне разрежения (Рис. 67).

При первом, наиболее простом сценарии (профили A-Airfoil, S825 и S814), после появления отрыва формируется одна вихревая («грибообразная») структура, которая сохраняется при дальнейшем увеличении угла атаки (вплоть до отрыва от передней кромки крыла). При этом секционный коэффициент подъемной силы в центральном сечении (именно эта величина измеряется в эксперименте) начинает уменьшаться сразу после формирования трехмерной структуры.

Второй сценарий (профиль DU-97-W-300) аналогичен первому, однако в данном случае формируются две грибообразные структуры.

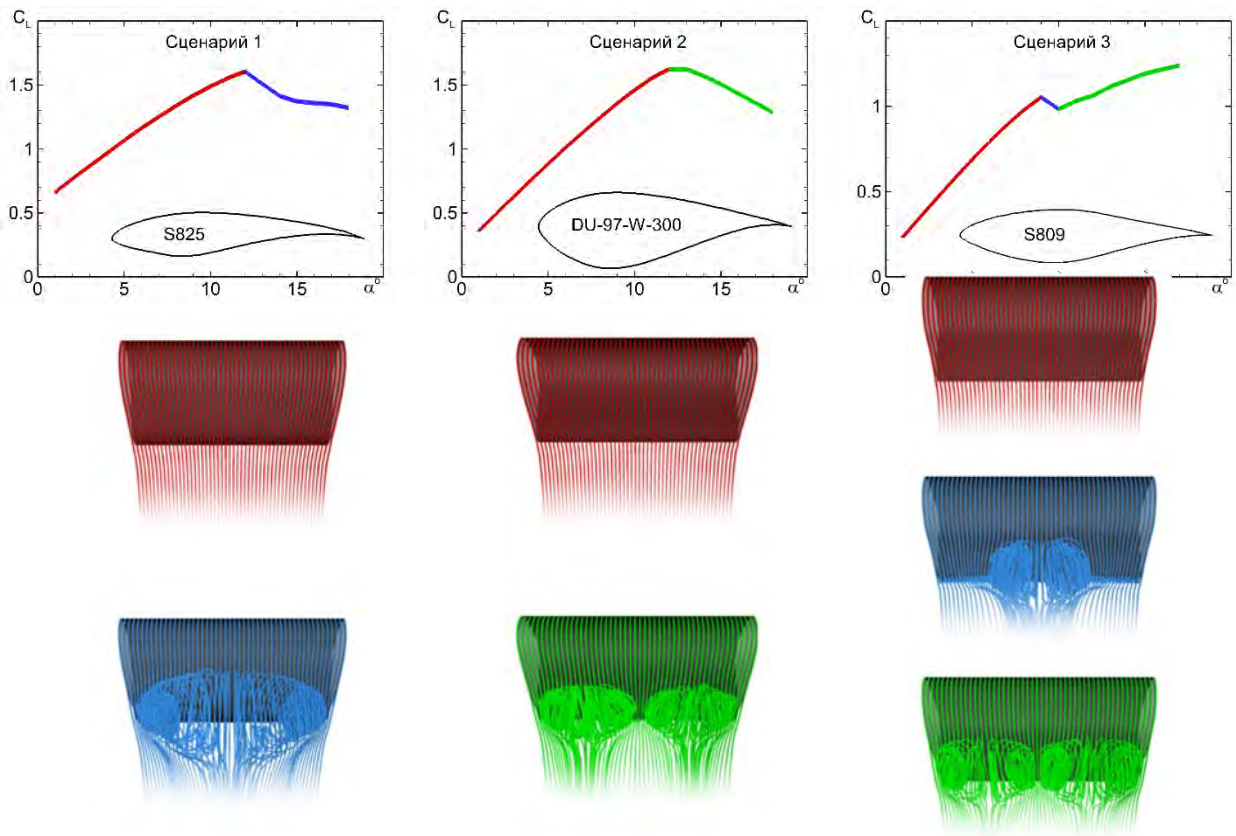


Рис. 67. Различные сценарии обтекания рассматриваемых прямых крыльев: секционный коэффициент подъемной силы (сверху) и поверхностные линии тока (снизу). Красный цвет соответствует безотрывному двумерному обтеканию, а синий и зеленый – трехмерному течению с одной и двумя «грибообразными» структурами, соответственно.

Наконец, последний сценарий (S805 и S809), представляется наиболее сложным. В нем сначала формируется одна грибообразная структура, в результате чего секционный коэффициент подъемной силы в центральном сечении начинает уменьшаться, а при дальнейшем увеличении угла атаки она распадается на две такие структуры (коэффициент подъемной силы в среднем сечении начинает снова расти).

Изменение структуры потока с ростом угла атаки для крыла A-Airfoil наглядно иллюстрирует Рис. 68, на котором приведено сравнение поверхностных линий тока, полученных с использованием моделей γ -SST и γ -SST HL, с экспериментальными данными [213]. Видно, что расчет с использованием модели γ -SST HL хорошо предсказывает форму и размер отрывной зоны при различных, в том числе, околокритических значениях угла атаки. В противоположность этому, согласно стандартной γ -SST модели, двумерный характер обтекания крыла наблюдается вплоть до угла атаки 16° , что, естественно, влечет за собой неправильное предсказание распределения давления вдоль центральной линии крыла (Рис. 69) и соответствующего значения секционного коэффициента подъемной силы при больших углах атаки (Рис. 70). Из последнего рисунка видно

также, что при больших углах атаки модель SST HL кардинально превосходит стандартную модель SST по точности расчета коэффициента подъемной силы и для крыловых профилей другой формы. При этом в большинстве случаев (за исключением профилей S805 и DU-97-W-300) она весьма точно предсказывает характер изменения коэффициента подъемной вплоть до его значений близких к критическим.

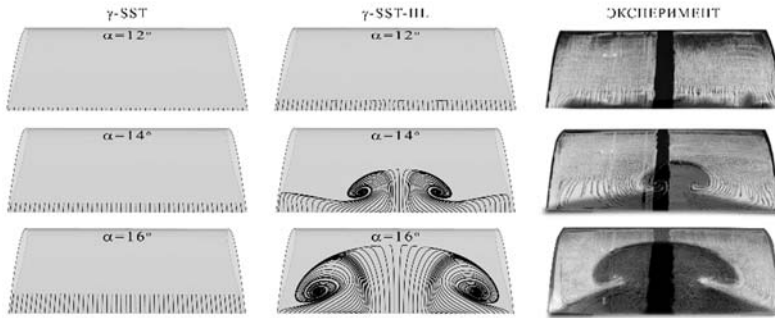


Рис. 68. Сравнение расчетных поверхностных линий тока на крыле A-Airfoil, полученных с использованием моделей γ -SST и γ -SST HL, с экспериментальной визуализацией течения с помощью масляной пленки.

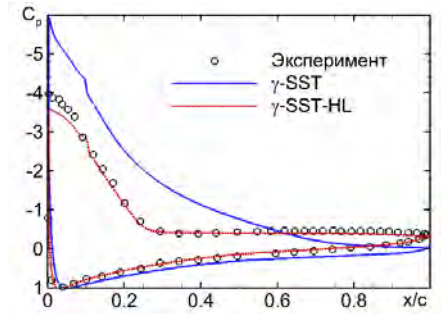


Рис. 69. Сравнение расчетного и экспериментального [213] распределения коэффициента давления в центральной секции крыла A-Airfoil при угле атаки 16° .

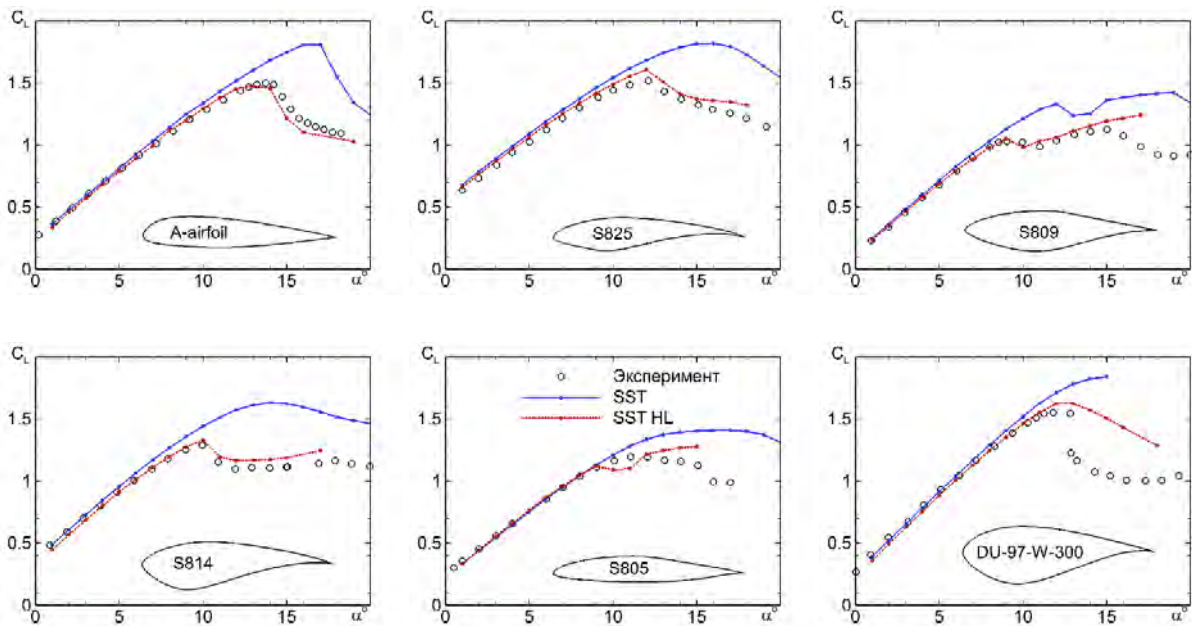


Рис. 70. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей секционного коэффициента подъемной силы от угла атаки для крыльев различной формы.

Таким образом, можно заключить, что модель SST HL полностью выполняет задачу, поставленную при ее разработке и состоящую в повышении точности расчета аэродинамических характеристик крыла при больших углах атаки.

2.3.4. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ SA TC

Данная модель (раздел 2.1.5) была предложена для повышения точности стандартной SA модели при расчете течений со значительной поперечной кривизной, в частности, осесимметричных течений, что определило выбор тестовых задач для оценки ее эффективности.

2.3.4.1. Затопленная осесимметричная струя

Постановка задачи

Для оценки точности модели SA TC при расчете данного класса течений были выполнены расчеты нескольких осесимметричных затопленных струй, для которых в литературе имеются достаточно надежные экспериментальные данные. В частности, были рассмотрены несжимаемые струи при числе Рейнольдса 10^5 как с однородным, так и с развитым профилем скорости на срезе сопла, экспериментальные исследования которых представлены в [253]. Кроме того, для этой цели привлекались обобщенные на основе нескольких экспериментов данные по темпу роста полуширины осесимметричной струи на ее основном участке [254]. Наконец, были проведены расчеты сжимаемой ($M = 0.9$) струи для которой в литературе имеются детальные экспериментальные данные [169] - [172], и результаты расчетов методом LES [168].

На Рис. 71 представлен типичной пример расчетной области и сетки в плоскости (x, r) . Видно, что сетка имеет сгущение для разрешения слоя смешения. В азимутальном направлении размер области составил 90° , а на ее границах задавались условия симметрии. Размер использовавшихся сеток составлял от 1 до 2 миллионов узлов.

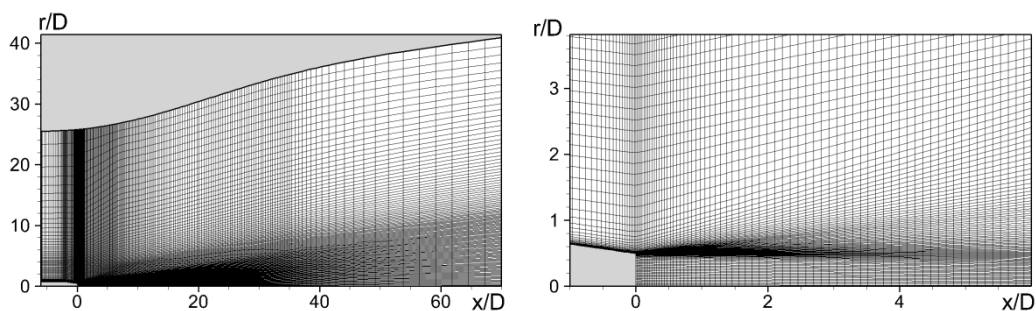


Рис. 71. Типичные расчетная область и сетка, использовавшиеся для расчета круглых затопленных струй.

Результаты расчетов

Сравнение характеристик несжимаемых струй, рассчитанных с использованием стандартной модели SA и модели SA TC, с экспериментальными данными, приведенное на Рис. 72 и Рис. 73, наглядно иллюстрирует кардинальное повышение точности расчета, обеспечиваемой последней моделью. Из этих рисунков видно, в частности, что независимо от формы профиля скорости

на срезе сопла при использовании модели SA TC наблюдается хорошее согласование с экспериментом, как величины максимальной скорости, так и полуширины струи $\delta_{0.5}$, определяемой как расстояние от оси струи до точки, в которой скорость составляет половину максимальной скорости в данном сечении. Что касается оригинальной модели SA, то она в два раза завышает скорость роста полуширины струи и, как следствие, предсказывает слишком быстрое падение скорости на ее оси.

Расчеты трансзвуковой ($M = 0.9$) струи были выполнены с использованием моделей SA и SA TC с поправкой на сжимаемость потока CC (1.6) – модели SA CC и SA TC CC, соответственно. Из Рис. 74 и Рис. 75 видно, что и в этом случае использование в качестве «базовой» модели SA TC приводит к значительному улучшению согласования результатов расчетов с экспериментальными данными и результатами LES.

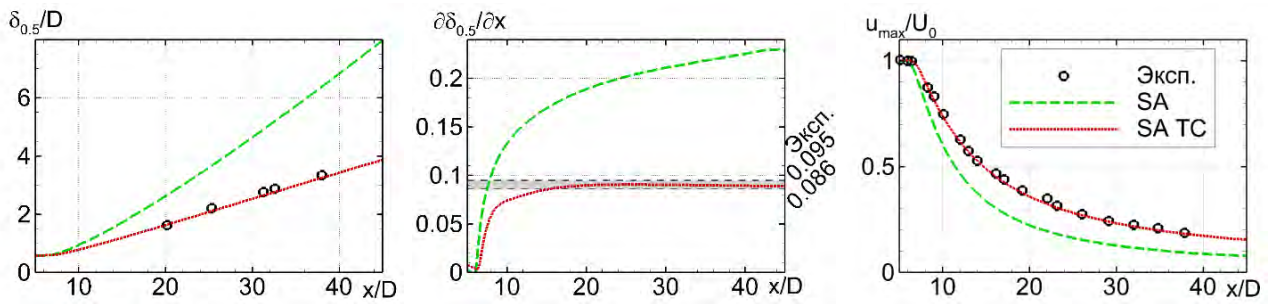


Рис. 72. Сравнение с экспериментами [253] и [254] результатов расчета затопленной струи с однородным профилем скорости на срезе сопла, полученных с использованием SA и SA TC моделей.

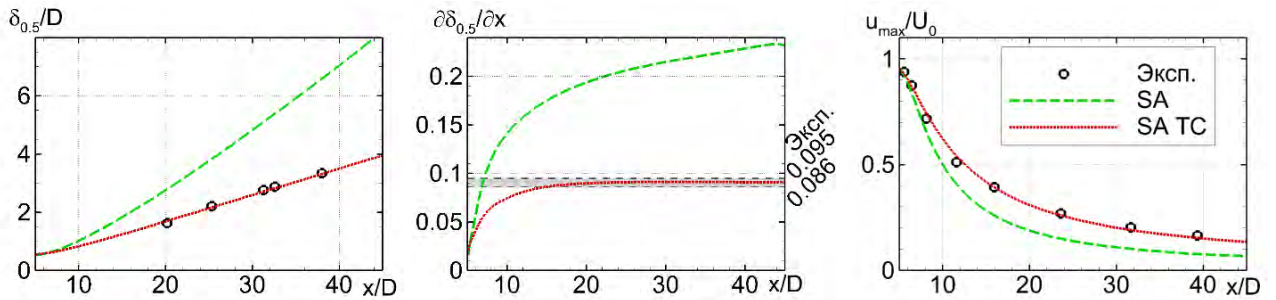


Рис. 73. То же, что на Рис. 72 для случая развитого профиля скорости на срезе сопла.

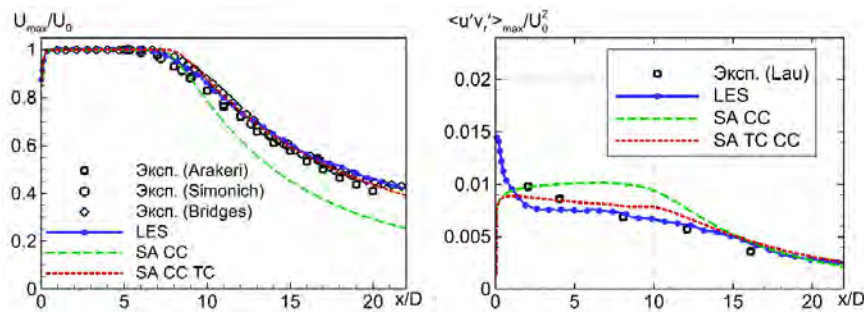


Рис. 74. Сравнение распределений скорости на оси струи и максимального касательного напряжения в затопленной трансзвуковой струе при $M = 0.9$, рассчитанных с использованием SA и SA TC моделей, с экспериментальными данными [169] - [172] и результатами LES [168].

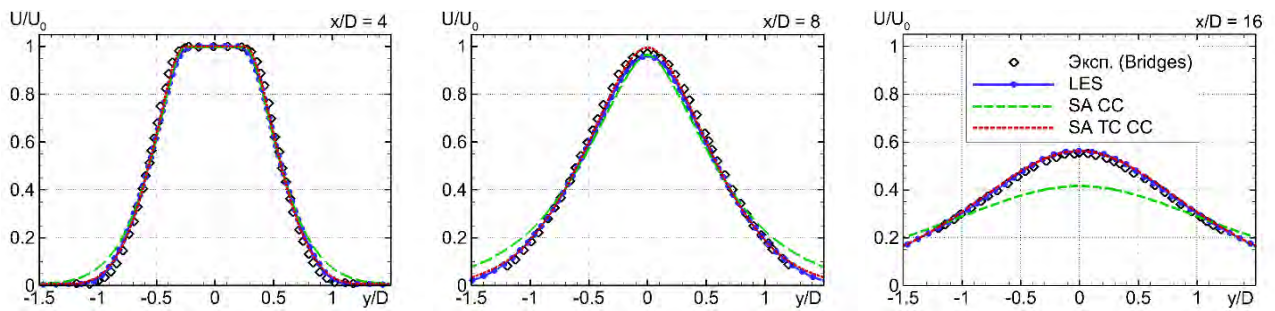


Рис. 75. Сравнение профилей скорости в различных сечениях затопленной трансзвуковой струи при $M = 0.9$, рассчитанных с использованием SA и SA TC моделей, с экспериментальными данными [171] и результатами LES [168].

2.3.4.2. Развитое течение в круглой трубе

Постановка задачи

Как известно, стандартная SA модель обеспечивает надежное предсказание характеристик данного течения. В связи с этим, необходимо было проверить, не приводит ли использование модели SA TC к снижению точности расчета по сравнению с оригинальной моделью. Для этого была проведена серия расчетов установившегося течения в круглой трубе в диапазоне чисел Рейнольдса, построенных по диаметру трубы D и среднерасходной скорости U_b , от $3 \cdot 10^4$ до $3 \cdot 10^7$. Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными различных групп, полученными в ходе проекта «SuperPipe» [255].

Результаты расчетов

Расчеты показали, что во всех рассмотренных случаях результаты, полученные с использованием моделей SA и SA TC, практически совпадают между собой. Это видно, в частности, из Рис. 76, на котором представлено сравнение зависимостей коэффициента сопротивления трубы $\lambda = \frac{\Delta p}{\rho U_b^2} \frac{D}{L}$ от числа Рейнольдса, рассчитанных с использованием обеих моделей, с экспериментальными данными. Таким образом, можно констатировать, что предложенная модель существенно превосходит по точности стандартную SA модель при расчете свободных осесимметричных сдвиговых течений и не уступает ей при расчете пристеночных осесимметричных течений.

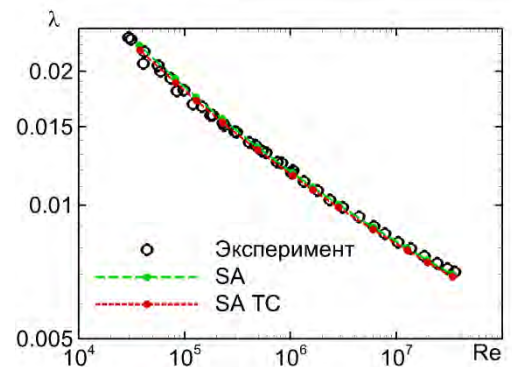


Рис. 76. Сравнение коэффициента сопротивления круглой трубы, рассчитанного с использованием моделей SA и SA TC, с экспериментальными данными [255].

2.3.5. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ SA LOW-RE

Как отмечалось в разделе 2.1.6, данная модель предназначена для повышения точности расчета стандартной SA модели при относительно низких значениях числа Рейнольдса. Для ее тестирования был выполнен расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине.

Постановка задачи

Рассматривается пограничный слой на пластине при числе Рейнольдса, построенном по ее длине L и скорости набегающего потока U_∞ , равном 10^7 . Расчетная область имела форму прямоугольника с размером $1.4L \times 0.2L$ и содержала предвключенный участок длиной $0.4L$ и собственно пластину длиной L . На входной (левой) границе области задавались однородный профиль скорости U_∞ и величина относительной турбулентной вязкости $\nu_t/\nu = 0.1$, которая обеспечивала развитие турбулентного пограничного слоя непосредственно от начала пластины. На участке нижней границе области, расположенном вверх по потоку от пластины, задавались условия симметрии, а на самой пластине – условия прилипания. В расчетах использовалась одноблочная сетка размером 342×223 .

Результаты расчета

На Рис. 77 представлено сравнение результатов расчетов зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса Re_θ , построенного по локальной толщине потери импульса θ и скорости набегающего потока U_∞ , полученных с использованием стандартной модели SA и модели SA Low Re, с экспериментальными данными, эмпирической корреляцией Кармана-Шонхера [215] и результатами DNS. Из него следует, что в области относительно низких (< 5000) значений Re_θ модель SA Low Re существенно превосходит по точности оригинальную SA модель. При этом, в отличие от этой модели, профиль скорости, полученный с использованием модели SA Low-Re, удовлетворяет классическому закону стенки не только при высоких, но и при низких значениях локального числа Рейнольдса (Рис. 78).

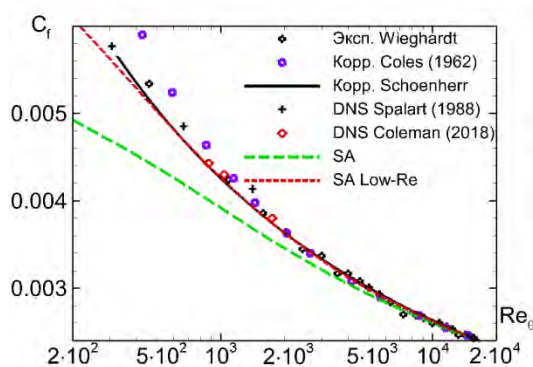


Рис. 77. Сравнение расчетного коэффициента трения с данными эксперимента и DNS [40], [214], [215], [256], [257].

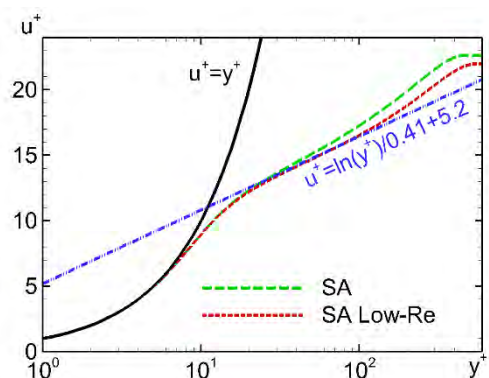


Рис. 78. Сравнение профилей скорости в переменном законе стенки при $Re_\theta = 10^3$.

ГЛАВА 3. ФОРМУЛИРОВКА И ТЕСТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ RANS-LES ПОДХОДОВ

В данной главе представлены результаты исследований автора в области усовершенствования гибридных RANS-LES моделей для расчета пристеночных турбулентных течений. Раздел 3.1 содержит описание предложенных моделей, в разделе 3.2 описаны особенности вычислительного алгоритма и новая гибридная конечно-объемная схема для глобальных HRLM, а раздел 3.3 посвящен тестированию предложенных моделей.

Соавторами моделей и результатов, представленных в настоящей главе, являются Ф. Менгер, М.Х. Стрелец, М.С. Грицкевич, Е.К. Гусева и К.В. Никифорова.

3.1. ФОРМУЛИРОВКА РАЗРАБОТАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Как отмечалось в разделе 1.2, большинство известных модификаций метода DES разработано применительно к его версиям, построенным на основе модели SA. Между тем, поскольку выбор базовой модели для DES-подобных HRLM непосредственно влияет на точность расчета присоединенных пограничных слоев (в том числе, на точность предсказания точки/линии отрыва) и, как следствие, на точность гибридного подхода в целом, построение модификаций DES на базе альтернативных RANS моделей представляет большой практический интерес. Как уже неоднократно отмечалось, одной из лучших RANS моделей является модель $k-\omega$ SST [56], [57], в связи с чем основные усилия автора в области развития DES-подобных моделей были направлены на их адаптацию именно к этой модели.

Так, в разделе 3.1.1 представлены предложенные версии DDES и IDDES подходов на основе модели SST, в разделе 3.1.2 - соответствующие версии σ -DDES в сочетании с подсеточным масштабом $\tilde{\Delta}_\omega$ и DDES в сочетании с подсеточным масштабом Δ_{SLA} [258], а раздел 3.1.3 посвящен разработке технологии применения зонных гибридных RANS-LES подходов на неструктурированных сетках.

3.1.1. АДАПТАЦИЯ МЕТОДОВ DDES И IDDES К БАЗОВОЙ SST МОДЕЛИ

Модели, представленные в данном разделе, были предложены в соавторстве с М.С. Грицкевичем и Ф. Менгером в работах [174], [259].

В рамках метода DDES определение линейного масштаба турбулентности (1.31), входящего в уравнение переноса кинетической энергии турбулентности (1.30), включает эмпирическую функцию f_d (1.32), предназначенную для блокировки переключения DDES из режима RANS в режим LES в присоединенных пограничных слоях.

Значения эмпирических констант C_{d1} и C_{d2} , входящих в f_d , подобранные для DDES на основе SA модели, равны 8 и 3 соответственно [149]. Однако, в силу различий моделей SA и SST, профили параметра r_d , от которого зависит функция f_d , оказываются различными (левый график на Рис. 79), что, в свою очередь, приводит к различному поведению функции f_d в рамках моделей SA и SST¹² (средний график на Рис. 79). В результате, при указанных значениях констант C_{d1} и C_{d2} , SST DDES оказывается недостаточно защищенным от переключения в LES моду внутри пограничного слоя, что влечет за собой большую погрешность расчета трения на стенке (правый график на Рис. 79, красная линия).

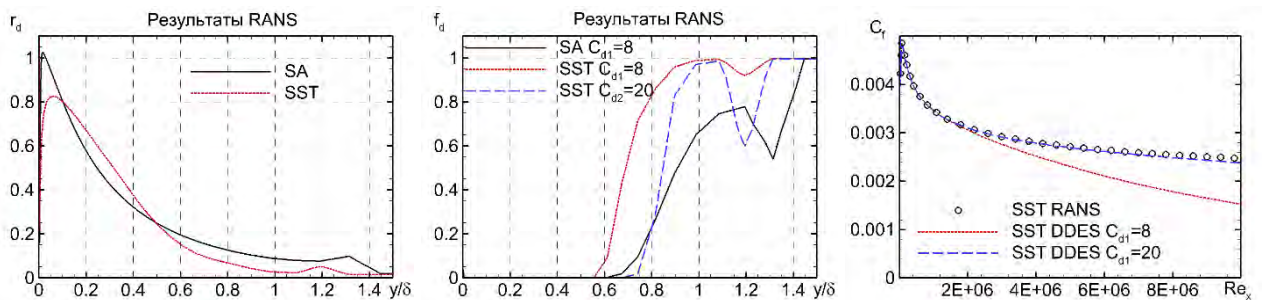


Рис. 79. Распределения параметра r_d (слева), защитной функции f_d поперек пограничного слоя (в центре) и влияние константы C_{d1} на результаты расчета пограничного слоя на плоской пластине (справа).

На основе серии SST DDES расчетов турбулентного пограничного слоя на пластине с использованием различных значений констант C_{d1} и C_{d2} в диссертации было подобрано значение константы $C_{d1} = 20$ (значение константы C_{d2} не изменилось), обеспечивающее достаточную (не меньшую, чем в SA DDES) защиту пограничного слоя. Это наглядно демонстрирует правая рамка на Рис. 79, где приведены результаты расчета коэффициента трения в пограничном слое на пластине, полученные на сетке, с максимальным шагом равным $1/10$ толщины пограничного слоя. Видно, что при $C_{d1} = 20$ зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса, рассчитанная с использованием SST DDES, практически совпадает с аналогичной зависимостью, рассчитанной с помощью SST RANS. Иными словами, это значение константы обеспечивает достаточно надежную защиту от переключения DDES в LES моду в присоединенном пограничном слое. Следует отметить, что такой выбор константы C_{d2} является оптимальным компромиссом, поскольку при ее дальнейшем увеличении, обеспечивающим более надежную защиту присоединенного пограничного слоя, неизбежно понижается точность DDES в области отрыва пограничного слоя. Проверка, проведенная на примере течения в канале с внезапным расширением (постановка

¹² Здесь и далее используется версия модели SST-2003 [57], формулировка которой приведена в разделе 1.1: соотношения (1.12) – (1.16), (1.18) – (1.20).

соответствующей задачи приведена в разделе 3.3.2.1), показала, что при значении константы $C_{d2} = 20$ этого не происходит.

Аналогичная модификация, связанная с калибровкой констант «защитной» функции f_{dt} (1.44), была реализована для SST IDDES (соотношения (1.41) – (1.49) в разделе 1.2). Как и в случае DDES, константы данной функции, подобранные для SA IDDES, не обеспечивают достаточной защиты пограничного слоя (f_{dt} оказывается близкой к 1 в значительной его части). Для выбора оптимальных значений констант были проведены расчеты пограничного слоя на плоской пластине с различными значениями констант C_{d1} и C_{d2} . Поскольку на входе в расчетную область отсутствовал турбулентный контент, IDDES функционировал в режиме DDES и должен был обеспечивать RANS решение. Результаты проведенных расчетов показали, что при использовании «стандартных» значений констант этого не происходит и что оптимальные значения констант для SST IDDES совпадают со значениями, которые были подобраны для SST DDES, то есть $C_{d1} = 20$ и $C_{d2} = 3$. Для проверки правильности работы IDDES в WMLES режиме при этих значениях констант были выполнены расчеты установившегося течения в канале (постановка задачи приведена в разделе 3.3.1) при различных числах Рейнольдса и течения в канале с внезапным расширением. В частности, из Рис. 80 видно, что увеличение константы C_{d1} до 20 не приводит к сколько-нибудь заметному снижению точности метода.

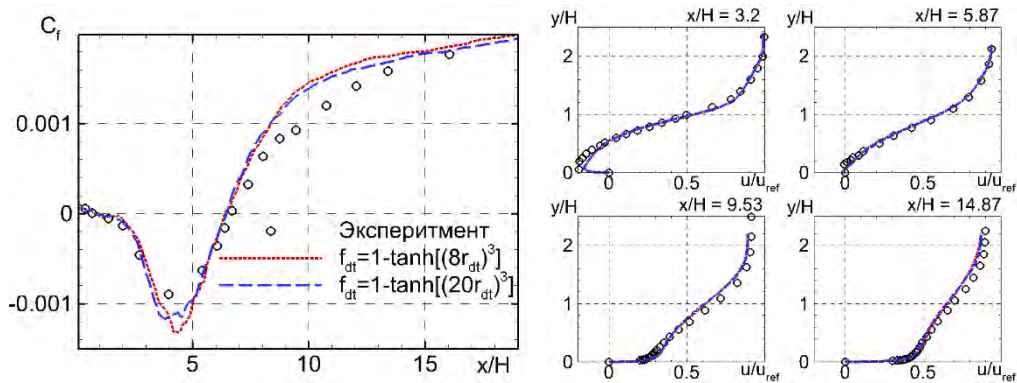


Рис. 80. Влияние константы C_{d1} на результаты расчета течения в канале с внезапным расширением методом IDDES: коэффициент трения за уступом и профили продольной компоненты скорости в сечениях $x/H = 3.2, 5.87, 9.53, 14.87$.

Наряду с необходимостью рекалибровки констант, исследования, проведенные автором в [174] показали, что предложенная в работе [173] версия SST IDDES может быть заметно упрощена.

Первое упрощение касается определения гибридного подсеточного масштаба длины Δ_{IDDES} (1.42). Для улучшения поведения SST IDDES подхода на сетках, в которых отношение шагов в направлении по нормали к стенке больше 1.15, в это определение включен шаг сетки в направ-

лении по нормали к стенке Δ_{wn} . Однако такие сетки неприемлемы для проведения WMLES расчетов [167] и, в принципе, данная ветвь гибридного масштаба Δ_{IDDES} не должна активироваться. Кроме того, определение величины Δ_{wn} на неструктурированных сетках является весьма проблематичным. В связи с этим было предложено отказаться от использования Δ_{wn} , и вместо (1.42) использовать упрощенную версию масштаба Δ_{IDDES} :

$$\Delta_{IDDES} = \min(C_w \cdot \max(d_w, \Delta_{\max}), \Delta_{\max}). \quad (3.1)$$

Максимальный шаг сетки Δ_{\max} , входящий в (3.1), легко определяется в том случае, когда ячейки сетки близки к параллелепипедам: $\Delta_{\max} = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ [23], где Δx , Δy и Δz – ребра ячейки сетки. Такое определение подходит для структурированных сеток, однако оно неприменимо для ячеек произвольной формы. Действительно, если рассмотреть правильный многогранник, вписанный в окружность радиуса R , то с увеличением количества вершин длина его ребра уменьшается, асимптотически приближаясь к 0, при этом размер разрешаемых вихрей по-прежнему остается величиной порядка R . Поэтому масштаб Δ_{\max} в (3.1) предлагается вычислять как максимальное расстояние между центром рассматриваемой ячейки и центрами соседних (имеющих с ней общую грань) ячеек. Определенный таким образом масштаб близок к $\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ в случае шестигранных ячеек и дает физически разумную оценку разрешаемых масштабов в случае многогранных ячеек.

Наконец, как уже отмечалось выше, IDDES модель содержит эмпирическую функцию f_e (1.47), введенную с целью предотвращения неоправданного уменьшения рейнольдсовых напряжений в RANS подобласти, обычно наблюдаемого вблизи границы RANS и LES подобластей IDDES при его работе в режиме WMLES. Выполненные исследования показали, что в рамках SST IDDES этот эффект проявляется значительно слабее, чем в рамках SA IDDES. Учитывая тот факт, что введение функции f_e существенно усложняет формулировку IDDES, было предложено отказаться от ее использования в рамках SST IDDES, то есть положить функцию f_e в уравнении (1.41) равной 0.

Тестовые расчеты установившегося течения в плоском канале, канале с внезапным расширением и в канале с гладкой выпуклостью на одной из стенок (см. постановку задачи в разделе 3.3.2.2) показали, что это упрощение практически не влияет на точность метода.

Предложенные модификации методов SST DDES и SST IDDES были реализованы автором в коде NTS и его аспирантом М.С. Грицкевичем в ANSYS FLUENT с использованием UDF¹³.

¹³ Позже предложенные модификации были имплементированы сотрудниками ANSYS в коды FLUENT и CFX и в настоящее время они являются основными версиями методов SST DDES и SST IDDES в этих кодах.

3.1.2. УСКОРЕНИЕ ПЕРЕХОДА К РАЗВИТОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СЛОЯХ СМЕШЕНИЯ В РАМКАХ DDES НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ SST

Как отмечалось в Главе 1, два наиболее эффективных метода ускорения перехода к развитой турбулентности в оторвавшихся от обтекаемой поверхности слоях смешения в рамках SA DDES были предложены в работах [162]. Адаптация этих методов к базовой модели SST была выполнена автором совместно с М.Х. Стрельцом и аспиранткой Е.К. Гусевой в работах [260], [258].

Идея первого подхода применительно к модели SA DDES, как уже было сказано в разделе 1.2.1, состоит в замене величины Ω в генерационном слагаемом модели Спаларта-Аллмараса на выражение (1.33). В результате, в равновесии, т.е. при равенстве генерации турбулентной вязкости и ее диссипации, эта модель переходит не в модель Смагоринского, как в случае SA DDES, а в подсеточную модель σ [168]:

$$\nu_t = (C_\sigma \Delta)^2 S_\sigma. \quad (3.2)$$

Здесь C_σ - константа модели, а S_σ - оператор σ -модели, определяемый соотношением:

$$S_\sigma = \sigma_3 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_2 - \sigma_3) / \sigma_1^2, \quad (3.3)$$

где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ - три собственных числа тензора градиента скорости $\partial U_i / \partial x_j$, которые можно определить, например, по тригонометрической формуле Виета.

Построенный таким образом оператор S_σ равен нулю в двумерных течениях, в том числе в поле чистого сдвига, в областях течения, соответствующих твердому вращению, а также в областях осесимметричного или изотропного расширения. Именно эти свойства оператора S_σ приводят к снижению подсеточной вязкости на начальных участках слоев смешения и, как следствие, к ускорению перехода в них к развитой трехмерной турбулентности.

Предлагаемая в диссертации адаптация описанной выше идеи для метода SST DDES состоит в замене величины S^2 , входящей в генерационные слагаемые уравнений переноса кинетической энергии турбулентности и удельной диссипации модели SST, на выражение

$$S_{\sigma-DDES}^2 = S^2 - \theta(f_d - 0.99) \theta(l_{RANS} - C_{DES} \Delta) (S^2 - B_\sigma^2 S_\sigma^2), \quad (3.4)$$

где $\theta(a)$ – функция Хевисайда (1.34), а B_σ – новая, подлежащая калибровке, константа модели SST σ -DDES.

В RANS областях потока (т.е. при $C_{DES} \Delta > l_{RANS}$ и $f_d < 0.99$) оператор $S_{\sigma-DDES}^2$ равен инварианту тензора скоростей деформации S^2 , т.е. полученная в результате описанной замены модель,

также как и стандартная SST DDES модель, работает в режиме SST RANS. В то же время, в LES подобласти в результате предлагаемой замены в определении генерации кинетической энергии турбулентности используется оператор $B_\sigma^2 S_\sigma^2$.

Нетрудно показать, что в случае локального равновесия (генерация турбулентных характеристик равна их диссипации) предлагаемая модель SST σ -DDES, также, как SA σ -DDES, переходит в LES подобласти в алгебраическую подсеточную σ -модель (3.2). Действительно, в этом случае уравнения переноса турбулентных характеристик (1.13) и (3.4) для подсеточной модели σ -DDES подхода могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{cases} \partial \rho k / \partial t + \partial \rho u_k k / \partial x_k = \partial [(\mu + \sigma_k \mu_t) \partial k / \partial x_k] / \partial x_k + \mu_t (B_\sigma S_\sigma)^2 - \rho k^{3/2} / (C_{DES} \Delta) \\ \partial \rho \omega / \partial t + \partial \rho u_k \omega / \partial x_k = \partial [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \partial \omega / \partial x_k] / \partial x_k + \gamma \rho (B_\sigma S_\sigma)^2 - \beta \rho \omega^2 + (\partial k / \partial x_k) (\partial \omega / \partial x_k) \sigma_d / \omega \end{cases}, (3.5)$$

из которой следует, что условия локального равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \mu_t (B_\sigma S_\sigma)^2 = \rho k^{3/2} / (C_{DES} \Delta) \\ \gamma \rho (B_\sigma S_\sigma)^2 = \beta \rho \omega^2 \end{cases}. (3.6)$$

Из системы (3.6) легко получить следующее выражение для турбулентной вязкости

$$\nu_t = \left(\left[C_{DES} \sqrt{\beta^{3/2} B_\sigma / \gamma^{3/2}} \right] \Delta \right)^2 S_\sigma. (3.7)$$

Сравнивая это выражение с аналогичным выражением σ -модели (3.2), нетрудно получить связь между константой B_σ SST σ -DDES подхода и константой алгебраической σ -модели C_σ :

$$B_\sigma = \gamma^{3/2} C_\sigma^2 / (\beta^{3/2} C_{DES}^2) \approx 25 C_\sigma^2. (3.8)$$

Значения константы C_σ , рекомендуемые в работе [164] для σ -модели, лежат в диапазоне 1.3 – 1.5, поэтому с учетом (3.8) соответствующий диапазон значений константы B_σ составляет $B_\sigma \approx 40 - 60$. Однако для более точного определения данной константы необходимо выполнить ее калибровку. Как и в работах [128] и [164], она проводилась на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности. Постановка задачи соответствовала условиям эксперимента [208], в котором исследовался процесс вырождения турбулентности в течении за решеткой при числе Рейнольдса $Re = L_0 U_0 / \nu = 1.62 \cdot 10^3$, где U_0 – скорость, построенная по кинетической энергии турбулентности потока, а L_0 – шаг решетки.

Расчеты проводились в кубической области со стороной $2\pi L_0$ на двух равномерных декартовых сетках размером 32^3 и 64^3 с использованием периодических граничных условий по всем трем направлениям. Шаг интегрирования по времени зависел от используемой сетки и задавался

равным $0.01 L_0/U_0$ и $0.005 L_0/U_0$ для грубой и мелкой сеток, соответственно. В качестве начальных условий задавались поля однородной изотропной турбулентности со спектром кинетической энергии турбулентности, совпадающим со спектром известным из эксперимента.

Результаты расчетов, выполненных с использованием различных значений константы B_σ , показали, что ее значение, обеспечивающее наилучшее согласование расчетных спектров разрешенной кинетической турбулентности с экспериментальными спектрами в различные моменты времени, равно 57 (Рис. 81).

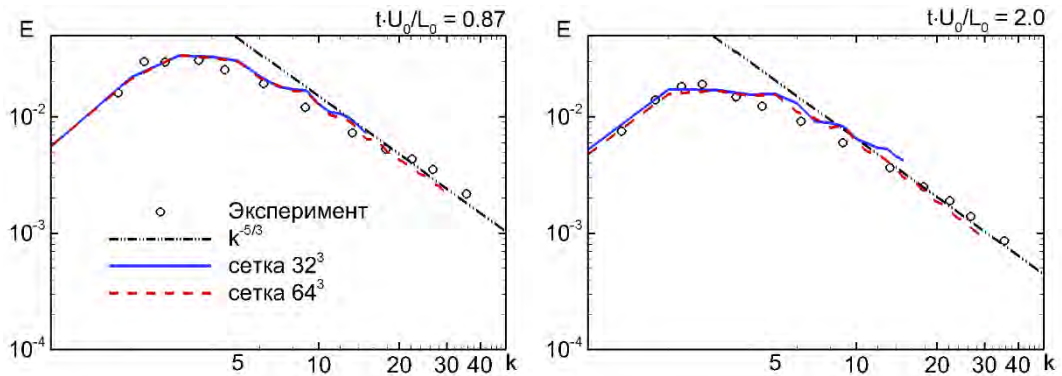


Рис. 81. Спектры разрешенной кинетической энергии турбулентности, полученные с помощью подсеточной модели SST σ -DDES подхода с константой $B_\sigma = 57$ на двух сетках в моменты времени $t = 0.87L_0/U_0$ и $t = 2L_0/U_0$.

Наконец гибридный масштаб длины, входящий в диссипативное слагаемое уравнения переноса кинетической энергии турбулентности (1.30), определяется выражением (1.31), в котором вместо стандартного для DDES подсеточного масштаба Δ_{\max} , следуя рекомендациям [162], используется масштаб $\tilde{\Delta}_\omega$ (1.35).

Второй из вышеупомянутых методов ускорения перехода к развитой трехмерной турбулентности в слоях смешения в рамках SA DDES состоит в замене традиционного для DES-подобных моделей подсеточного масштаба Δ_{\max} на адаптированный к слоям смешения масштаб Δ_{SLA} (1.40).

При проведении расчетов с использованием этого масштаба в рамках SST DDES в настоящей работе был обнаружен его вычислительный недостаток, состоящий в снижении скорости сходимости итераций при расчете аэродинамических (внешних) течений. Анализ результатов расчетов показал, что это вызвано случайными колебаниями параметра $\langle VTM \rangle$ (1.37) и зависящей от него функции F_{KH} (1.38) в свободном безвихревом потоке.

Решение этой проблемы, предложенное в диссертации, заключается в умножении величины $\langle VTM \rangle$ в (1.38) на функцию

$$F_{\text{inf}} = \max[1, (0.2v/\max\{v_t - v_{t\infty}, 10^{-6}v\})]. \quad (3.9)$$

В невязком внешнем потоке, где величина турбулентной вязкости близка к значению ν_{∞} , заданному на входной границе области, величина F_{inf} становится очень большой (вплоть до $2 \cdot 10^5$), что ведет к деактивации функции F_{KH} . Окончательное выражение для функции F_{KH} (с учетом предложенной поправки) принимает вид:

$$F_{KH}(\langle VTM \rangle) = \max \left\{ F_{KH}^{\min}, \min \left\{ F_{KH}^{\max}, F_{KH}^{\min} + (F_{KH}^{\max} - F_{KH}^{\min}) (\langle VTM \rangle F_{\text{inf}} - a_1) / (a_2 - a_1) \right\} \right\}. \quad (3.10)$$

Такое определение функции F_{KH} гарантирует ее равенство единице во внешнем невязком потоке и в области, где течение носит трехмерный характер. При этом в двумерных и квазидвумерных областях вязкого потока функция F_{KH} , определяемая соотношением (3.10), как и стандартная функция (1.38), равна 0.1. Это приводит к примерно стократному уменьшению подсеточной вязкости на начальном участке слоев смешения, что способствует ускорению формирования в них развитых трехмерных турбулентных структур.

Следует отметить, что любые изменения формулировки метода DDES, в том числе и описанные выше модификации, направленные на ускорение перехода от RANS к LES в оторвавшихся слоях смешения, могут негативно влиять на его «защитные» свойства.¹⁴ Так, в работе [162] при разработке SA σ -DDES подхода потребовалось увеличить константы функции f_d , чтобы обеспечить близкий к SA DDES уровень «защиты» пограничного слоя от активации LES моды в присоединенных пограничных слоях, приводящей к глобальному снижению точности расчета.

Для проверки того, не возникает ли такой необходимости при использовании предложенных модификаций DDES, были проведены расчеты пограничного слоя на плоской пластине с использованием этих модификаций (SST σ -DDES и SST DDES Δ_{SLA}). Число Рейнольдса, построенное по толщине пограничного слоя входного профиля δ_0 , составляло в этих расчетах $1.75 \cdot 10^5$, величина первого пристеночного шага в переменных закона стенки не превышала единицы, шаги сетки в продольном и поперечном направлениях были равномерными и составляли порядка 15% толщины пограничного слоя во входном сечении.

Результаты расчетов (Рис. 82) показали, что с точки зрения защитных свойств, обе

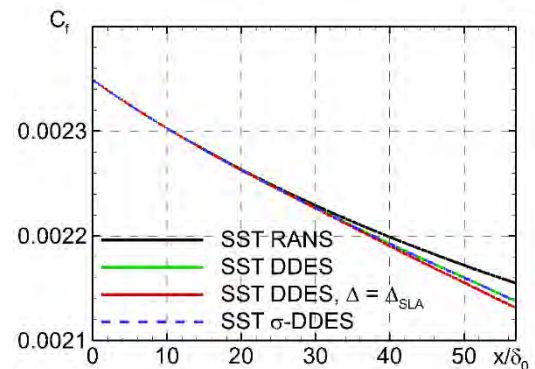


Рис. 82. Сравнение распределений коэффициента трения вдоль пластины, полученных с использованием SST DDES Δ_{SLA} и SST σ -DDES, с результатами SST RANS и SST DDES.

¹⁴ Это замечание в равной степени применимо к IDDES.

предложенные модификации практически не уступают предложенному методу SST DDES что позволяет сделать вывод об отсутствии необходимости в перенастройке в них констант функции f_a (2.9).

Предложенные методы ускорения перехода были реализованы под руководством автора аспирантами Е.К. Гусевой в коде NTS и М.С. Грицкевичем в коде ANSYS FLUENT с использованием UDF.

3.1.3. ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЗОННЫХ RANS-LES ПОДХОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЪЕМНОГО ИСТОЧНИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Как уже отмечалось в разделе 1.2.2, при использовании объемного источника синтетической турбулентности для создания турбулентного контента на входе в LES область в рамках зонных RANS-LES подходов возникает ряд технологических проблем, главная из которых состоит в том, что для вычисления объемного источника необходима информация о характеристиках турбулентности из RANS решения. Эту информацию легко получить в рамках двухстадийной процедуры расчета, первая стадия которой включает RANS расчет течения во всей рассматриваемой области. Однако такая процедура является достаточно трудоемкой, а в ряде случаев оказывается просто неработоспособной из-за невозможности получения стационарного RANS решения.

При проведении расчетов на структурированных сетках данная проблема решается путем сноса соответствующих характеристик из RANS подобласти в область объемного источника вдоль линий сетки. Однако обобщение этого подхода на произвольные сетки весьма затруднительно (если вообще возможно). В данном разделе описывается альтернативный путь решения этой проблемы, предложенный автором совместно с К.В. Никифоровой, Ф. Менгером и П.Е. Смирновым [261] (данная работа является естественным продолжением исследований автора, выполненных им совместно с аспирантом М.С. Грицкевичем [200]).

Предлагаемый подход состоит в следующем. Между RANS и LES подобластями вводятся две дополнительные подобласти – зона объемных источников (VS) и “зона интерфейса” (см. Рис. 83). В RANS подобласти используется модель SST [57], а VS и LES зонах - WMLES на основе гибридной алгебраической модели [173]:

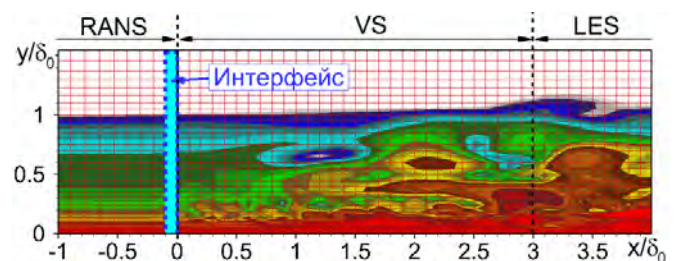


Рис. 83. Схема одностадийного зонного RANS-LES подхода.

$$v_t = f_{Damp} \cdot (\min(\kappa \cdot d_w, C_s \Delta_{IDDES}))^2 S, \quad (3.11)$$

где $f_{Damp} = 1.0 - \exp\left(-\left(d_w \sqrt{(v + v_t)S} / 25v\right)^3\right)$ - модифицированная демпфирующая функция Пиомелли [262], $\kappa = 0.41$ и $C_S = 0.2$ - константы Кармана и Смагоринского, соответственно, а линейный масштаб Δ_{IDES} определяется выражением (3.1).

Следует подчеркнуть, что использование в зоне VS алгебраической WMLES модели является принципиально важным, поскольку это исключает необходимость использования для определения подсеточной вязкости величин кинетической энергии турбулентности и ее удельной диссипации. Это, в свою очередь, открывает возможность определения необходимых для вычисления объемного источника характеристик турбулентности в VS зоне из решения уравнений переноса k и ω (эти уравнения решаются во всей расчетной области).

В области VS в уравнения переноса импульса добавляется объемный источник следующего вида:

$$f_i = \rho C_{VS} \cdot U_0 \cdot u'_i(\mathbf{r}, t) / L_{VS}, \quad (3.12)$$

где U_0 - максимальная скорость на интерфейсе на текущем шаге по времени, L_{VS} - длина зоны действия объемного источника в направлении потока, а $C_{VS} = 2.4$ - эмпирическая константа.

При решении чисто аэродинамических задач целесообразно использование зоны VS минимальной (вплоть до одной ячейки расчетной сетки) длины, а для аэроакустических приложений оптимальная величина L_{VS} составляет 2-3 локальные толщины пограничного слоя. Что касается зоны интерфейса, то в нее входят ячейки сетки RANS подобласти, непосредственно прилегающие к зоне VS.

Для определения пульсаций скорости $u'_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$ в соотношении (3.12) используется генератор синтетической турбулентности NTS STG [180], то есть соотношения (1.50) - (1.59), включающие характеристики турбулентности k и ω , которые, как упоминалось выше, определяются из решения соответствующих уравнений переноса этих величин. При этом в уравнение переноса кинетической энергии турбулентности в зоне VS вводится отрицательный источник следующего вида:

$$f_k = (\beta^* \rho k \omega - \varepsilon_{SDES}) \cdot f_w(x). \quad (3.13)$$

Здесь $\varepsilon_{SDES} = \rho k^{3/2} / \min(L_t, C_{SDES} \Delta_{SDES})$, $\Delta_{SDES} = \max(\Delta_{Vol}, 0.2 \Delta_{max})$, $C_{SDES} = 0.4$, а $f_w(x)$ - функция, линейно изменяющаяся от 0.5 до 1.0 в области действия объемного источника:

$$f_w(x) = \max\left(\min\left\{0.5 + 0.5 \cdot (x - x_0) / L_{VS}, 1\right\}, 0\right), \quad (3.14)$$

где x_0 - координата начала зоны VS.

Введение стока (3.13) в уравнении переноса кинетической энергии турбулентности необходимо для постепенного уменьшения объемного источника (3.12) в области VS, что обеспечивает снижение ложного шума, генерируемого в этой области и, тем самым, открывает возможность применения предлагаемой технологии при решении задач аэроакустики.

Наконец, величины l_e^{\max} и U_0 , входящие в соотношение (1.58) для NTS STG, определяются с использованием текущего RANS решения в области интерфейса.

Разработанный подход был реализован К.В. Никифоровой под руководством автора в ANSYS FLUENT с помощью UDF.

3.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Как и в Главе 2, **верификация** реализации разработанных гибридных RANS-LES подходов производилась путем проведения внутренних проверок, а также путем сравнения результатов расчетов, полученных с использованием двух вычислительных кодов, а именно NTS кода [209] и ANSYS FLUENT. **тестирование** предложенных подходов проводилось путем сравнения результатов расчетов с известными из литературы экспериментальными данными.

Подробное описание стационарных ветвей кодов NTS и ANSYS FLUENT приведено в разделе 2.2. Ниже описаны специфические особенности их нестационарных ветвей, используемых при проведении расчетов в рамках гибридных RANS-LES подходов.

Для аппроксимации производных по времени в обоих кодах применяется трехслойная схема Эйлера второго порядка [229]. В NTS коде на каждом шаге по времени проводятся внутренние итерации по псевдовремени, а в ANSYS FLUENT используется один из двух подходов. В рамках первого из них осуществляется последовательное решение уравнений с итерационным продвижением по времени (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Corrected - SIMPLEC*) [263], [264], а в рамках второго - метод дробных шагов с безытерационным продвижением по времени (*Non-Iterative Time Advancement - NITA*) [265], [266].

При применении гибридных RANS-LES подходов исключительно важную роль играет способ аппроксимации невязких составляющих векторов потоков в уравнениях переноса, поскольку он в значительной степени определяет диссипативные свойства схемы, требования к которым различны в разных подобластях течения. Так, расчетная схема в RANS подобласти должна обеспечивать устойчивость решения на относительно грубых анизотропных сетках, что достигается при использовании высоко-диссипативных противопоточных схем. В противоположность этому, в LES подобластях необходимо использовать низкодиссипативные схемы, обеспечивающие разрешение мелкомасштабной турбулентности. В связи с этим, в настоящее время для численной

реализации гибридных подходов общепринятым является использование взвеси низкодиссипативных центрально-разностных и противопоточных схем с переменным по пространству весом, что, по крайней мере, в принципе позволяет одновременно удовлетворить обоим указанным требованиям.

При использовании зонных подходов, т.е. при явном разбиении расчетной области на RANS и LES подобласти, выбор расчетной схемы не вызывает затруднений. Так, в RANS подобласти и в невязком внешнем потоке в ANSYS FLUENT используется противопоточная схема второго порядка, а в NTS коде – противопоточная схема третьего порядка. В LES подобласти FLUENT и NTS код используют центрально-разностную схему второго или четвертого порядка, соответственно. Кроме того, для повышения устойчивости алгоритма в ANSYS FLUENT вместо центрально-разностной схемы могут применяться несколько более диссипативные схемы BCD (*Bounded Central Differencing*) или WBCD (*Weak Bounded Central Differencing*) [267]. Принцип работы этих схем основан на использовании специального индикатора монотонности решения (*convection boundedness criterion*), от значения которого зависит вес центрально-разностной и противопоточной схем.

В отличие от зонных методов, в глобальных подходах разделение на RANS и LES подобласти происходит автоматически на основе анализа расчетной сетки и текущего нестационарного решения. Это обстоятельство не позволяет априори (до проведения расчета) определить подобласти, в которых необходимо использовать ту или иную схему, что приводит к необходимости применения гибридных схем, в которых локальный вес различных аппроксимаций невязких составляющих векторов потоков, как и выбор используемой модели турбулентности (RANS или LES), определяется автоматически в процессе расчета.

Наиболее популярной из схем такого типа является гибридная схема [125], в которой веса противопоточной и центрально-разностной схем определяются на основе текущего решения и параметров используемой сетки. Эта схема была разработана для решения задач внешнего обтекания с большими отрывными зонами, вследствие чего в присоединенных пограничных слоях и в течениях с небольшими отрывными зонами она не всегда работает должным образом. Так, при использовании этой схемы вес противопоточной части может оказаться слишком высоким (близким или равным единице) как в оторвавшихся слоях смешения, что усугубляет проблему задержки RANS-LES перехода, так и при расчете присоединенных пограничных слоев в рамках WMLES, что приводит к заметному увеличению размеров разрешаемых турбулентных структур.

В связи этим автором совместно с Е.К. Гусевой и М.Х. Стрельцом [268] была разработана и имплементирована в NTS код новая гибридная схема для глобальных гибридных RANS-LES подходов, которая пригодна для решения более широкого класса задач, чем схема [125].

Аппроксимация невязких потоков в разработанной схеме имеет следующий вид:

$$F = (1-\sigma) F_{CD} + \sigma F_{BCD}. \quad (3.15)$$

Здесь F_{CD} означает аппроксимацию с помощью центрально-разностной схемы четвертого порядка точности, F_{BCD} – аппроксимацию с помощью схемы BCD, представляющей собой взвесь противопоточной схемы третьего порядка точности и центрально-разностной схемы четвертого порядка, а величина σ представляет собой весовую функцию, определяемую соотношением:

$$\sigma = \max(\sigma_{\min}, f_{inv}, f_{vt}, f_{2D\ BL}). \quad (3.16)$$

Здесь σ_{\min} – минимальный вес σ схемы BCD в аппроксимации (3.15), принимающий значения от 0 до 1 и задаваемый пользователем. В большинстве расчетов оптимальным является значение $\sigma_{\min} = 0$, однако при решении сложных задач на не очень качественных сетках этот параметр может быть увеличен для повышения устойчивости алгоритма.

Функции f_{inv} , f_{vt} и $f_{2D\ BL}$ в (3.16) служат для идентификации различных областей течения.

Первая из них, f_{inv} , служит для определения невязких областей потока и определяется следующим образом:

$$f_{inv} = 1 - \text{th}(B^4), \quad (3.17)$$

где $B = C_{H3} \Omega \max(S, \Omega) / \max\left\{\left(S^2 + \Omega^2\right) / 2, \tau^{-2}\right\}$ – аргумент весовой функции [125], S и Ω – инварианты тензоров скоростей деформации и завихренности (1.8), τ – характерное время конвективного проноса, построенное по характерным масштабам скорости и длины, а $C_{H3} = 2.0$ – эмпирическая константа.

Эта функция близка к 1 в невязкой области потока. Пример ее распределения из расчета обтекания выпуклости, расположенной на плоской поверхности, с использованием SST IDDES представлен в левой рамке Рис. 84 (постановка этой задачи приведена в разделе 3.3.2.2).

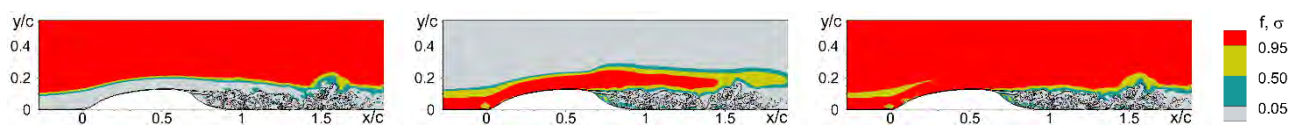


Рис. 84. Мгновенные поля функций f_{inv} (слева), $\max(f_{vt}, f_{2D\ BL})$ (в центре) и весовой функции σ (справа), полученные при расчете обтекания выпуклости на поверхности. Черными линиями на рисунке обозначены изолинии модуля завихренности $|\Omega|c/U_0 = 20$ и $|\Omega|c/U_0 = 40$.

Две другие функции f_{vt} и $f_{2D\ BL}$, входящие в (3.16), обеспечивают правильную координацию работы схемы внутри пограничных слоев, а именно включение схемы BCD при отсутствии в нем разрешенного турбулентного контента и схемы CD в противном случае.

Функция f_{vt} используется для активации VCD схемы в тех областях, где турбулентная вязкость, полученная в рамках используемого гибридного метода больше, чем вязкость, оцененная по алгебраической гибридной модели $\nu_{t,LES} = (\min\{0.2\Delta_{\max}, 0.41d_w\})^2 S$:

$$f_{vt} = 1 - \text{th}\left\{\left(2\nu_{t,LES}/\nu_t\right)^2\right\}. \quad (3.18)$$

Функция $f_{2D\ BL}$ определяется следующим соотношением:

$$f_{2D\ BL} = \text{th}\left(8r_{dt}^2\right)\left(1 - F_{KH}(<VTM>)\right), \quad (3.19)$$

где r_{dt} – аргумент «защитной» эмпирической функции f_d (2.6) метода DDES, функция $F_{KH}(<VTM>)$, позволяющая выделить двумерные участки течения, определяется выражением (1.38), а входящие в нее эмпирические константы равны $F_{KH}^{\min} = 0.0$, $F_{KH}^{\max} = 1.0$, $a_1 = 0.005$ и $a_2 = 0.01$.

Таким образом, при отсутствии турбулентного контента в присоединенном пограничном слое ($x/c < 0.6$ в средней рамке Рис. 84) функция $\max\{f_{vt}, f_{2D\ BL}\}$ близка к 1, что обеспечивает использование для аппроксимации невязких потоков в этой области схемы VCD. В противном случае (при наличии в этом пограничном слое разрешенных турбулентных структур) значение этой функции близко к нулю, и для аппроксимации невязких потоков используется низкодиссипативная CD схема.

В результате “итоговая” весовая функция σ в схеме (3.16), поле которой показано в правой рамке Рис. 84, оказывается равной 1 во внешнем потоке и в большей части пограничного слоя, не имеющего разрешенных турбулентных структур, т.е. невязкие потоки аппроксимируются в этих областях с помощью устойчивой схемы VCD. В то же время в слое смешения, в зоне рециркуляции и в присоединившемся к поверхности после отрыва от выпуклости пограничном слое, населенном разрешенными турбулентными структурами, $\sigma = 0$, т.е. используется низкодиссипативная CD схема.

3.3. ТЕСТИРОВАНИЕ ПРЕДЛОЖЕННЫХ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ

Тестирование предложенных усовершенствований DES-подобных HRLM было выполнено автором совместно с Ф. Ментером и аспирантом М.С. Грицкевичем в работах [174], [259] и совместно с М.Х. Стрельцом и аспиранткой Е.К. Гусевой в работах [258], [269] - [273]. Тестирование предложенной технологии проведения расчетов в рамках зонного подхода проведено совместно с К.В. Никифоровой и Ф. Ментером в работе [261].

3.3.1. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА SST IDDES

Оценка точности упрощенного метода SST IDDES (см. раздел 3.1.1) проводилась путем сравнения результатов оригинальной и модифицированной версий метода при расчете периодического течения в плоском канале при различных числах Рейнольдса. Это течение является каноническим тестом для оценки точности DES-подобных HRLM при их использовании в режиме LES с пристеночным RANS моделированием.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале при трех числах Рейнольдса $Re_\tau = h \cdot u_\tau / \nu$ равных 395, 1100 и 18000, где u_τ – динамическая скорость, h – полувысота канала, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Расчетная область имела размер $8h \times 2h \times 3h$. В уравнение переноса импульса в продольном направлении вводился источник, равный перепаду давления $dp/dx = -\rho \cdot (u_\tau^2)/h$. В продольном (по координате x) и поперечном (по координате z) направлениях использовались периодические граничные условия, а на стенках канала задавались условия прилипания и непроницаемости.

Расчетная сетка строилась в соответствии с хорошо известными требованиями для LES с пристеночным моделированием. В частности, она являлась равномерной в направлениях вдоль и поперек потока и, независимо от значения числа Рейнольдса, имела шаги $\Delta x/h = 1/10$ и $\Delta z/h = 1/20$. В направлении по нормали к стенке сетка сгущалась таким образом, чтобы для всех чисел Рейнольдса первый пристеночный шаг сетки в координатах закона стенки был меньше единицы ($\Delta y_w^+ < 1$), а максимальный шаг составлял $\Delta y/h = 1/15$. В результате общее количество узлов сетки несколько зависело от числа Рейнольдса и составляло от 400 до 650 тысяч.

Шаг по времени для данной задачи равнялся $\Delta t = 0.001 \cdot h/u_\tau$, что обеспечивало выполнение условия $CFL < 1$ во всей расчетной области. Время выхода на статистически установившийся режим составляло $2.5 \cdot h/u_\tau$, а осреднение проводилось на протяжении периода времени $5 \cdot h/u_\tau$.

Следует отметить, что при $Re_\tau = 395$ на используемой сетке SST IDDES подход работает в LES режиме практически до самой стенки, а при более высоких числах Рейнольдса значительная часть пристеночной области рассчитывается в RANS режиме. Это позволило оценить эффективность работы SST IDDES не только в WMLES, но и в LES режиме.

Результаты расчетов

На Рис. 85 результаты расчетов, полученные с использованием оригинальной и модифицированной версий SST IDDES модели, сравниваются между собой и с эмпирическими корреляциями [274], [275]

$$u^+ = \ln(1.0 + 0.4y^+) / \kappa + 7.8 \cdot \left[1 - \exp(-y^+/11) - y^+/11 \cdot \exp(-y^+/3) \right], \quad (3.20)$$

$$k^+ = \left(0.057 + \frac{\sqrt{Re_\tau/1600}}{20} \right) \cdot y^{+2} \cdot \exp\left(-\frac{y^+}{7.3}\right) + 4.6 \cdot \left(1 - \exp\left(-\left(y^+/3\right)^2\right) \right) \cdot \frac{1 - \exp(-0.05y^+)}{1 + 4 \cdot y^+/Re_\tau}, \quad (3.21)$$

где $\kappa=0.41$ – константа Кармана, а через $y^+ = y \cdot u_\tau / \nu$, $u^+ = u/u_\tau$ и $k^+ = k/u_\tau^2$ обозначены расстояние до стенки, скорость и кинетическая энергия турбулентности в координатах закона стенки.

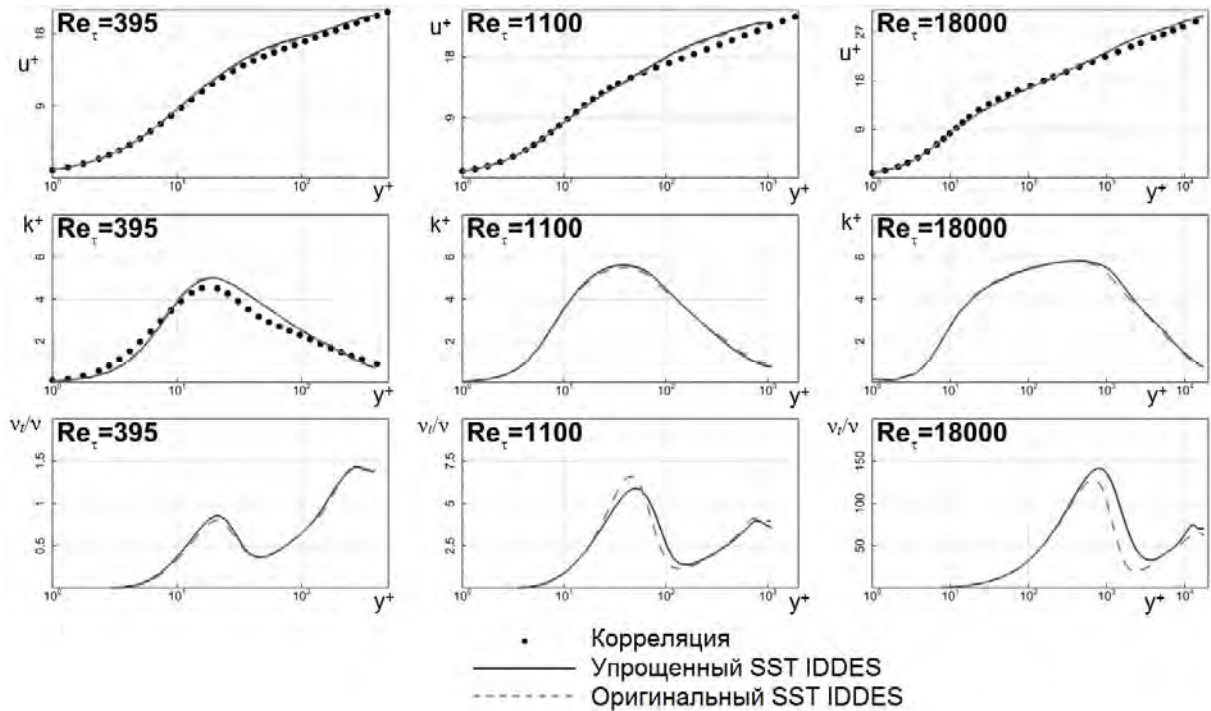


Рис. 85. Сравнение результатов модифицированной и оригинальной версий SST IDDES подхода между собой и с эмпирическими корреляциями: профили скорости (верхний ряд), полной кинетической энергии турбулентности (средний ряд) и турбулентной вязкости (нижний ряд).

Из Рис. 85 видно, что профили средней скорости и полной (разрешенной плюс подсеточной) кинетической энергии турбулентности, как и в оригинальной версии IDDES, хорошо согласуются с эмпирическими корреляциями (корреляция для кинетической энергии турбулентности справедлива только при низких числах Рейнольдса, и поэтому сравнение с ней проводилось только при $Re_\tau = 395$).

Таким образом, данный тест свидетельствует о том, что проведенная рекалибровка эмпирических констант IDDES и предложенное упрощение его формулировки вполне оправданы.

3.3.2. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ ПЕРЕХОДА К РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАМКАХ SST DDES

3.3.2.1. Течение в канале с внезапным расширением

Постановка задачи

Течение в канале с внезапным расширением, экспериментальное исследование которого было проведено в работе [276], является популярным тестом для оценки методов расчета турбулентных течений и широко использовалось для этой цели в большом числе работ, в том числе в рамках различных международных проектов, посвященных валидации моделей турбулентности.

Рассматривается плоский канал с прямой верхней стенкой и обратным уступом на нижней стенке (Рис. 86). Соотношение высот входного и выходного сечений канала равно $4/5$. Характерными масштабами в данной задаче являются высота уступа H и среднерасходная скорость во входном сечении U_0 . Экспериментальные числа Рейнольдса и Маха, построенные по этим масштабам, составляли $2.8 \cdot 10^4$ и 0.0318 , что позволило проводить расчеты в несжимаемой постановке.

На Рис. 86 представлены расчетная область, сетка в плоскости XU и ее основные параметры (размер и характерные шаги). Начало системы координат совпадало с положением уступа, а входная и выходная границы расчетной области располагались на расстояниях $3.8H$ и $20H$ от уступа, соответственно.

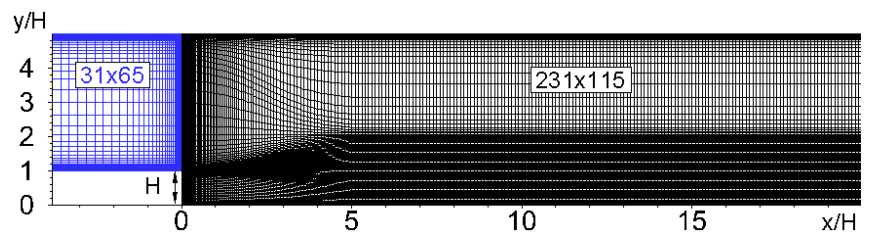


Рис. 86. Расчетная область и сетка в плоскости XU , использованные для расчетов течения в канале с внезапным расширением.

Расчетная сетка в плоскости XU была сгущена по координате y в области отрывающегося от уступа слоя смешения и вблизи стенок канала, где выполняется условие $\Delta y_1^+ < 1$. В трансверсальном направлении размер расчетной области составлял $L_z = 4H$, а шаг сетки Δz был постоянен и равен $0.05H$. В пограничном слое на нижней стенке вниз по потоку от точки присоединения шаги сетки удовлетворяли критериям WMLES сеток [173] ($\Delta x < \delta/10$, $\Delta z < \delta/20$, δ – локальная толщина пограничного слоя). В результате общее число ячеек составляло примерно $2.6 \cdot 10^6$.

В качестве граничных условий на входной границе ($x = -3.8H$) задавались профили скорости и турбулентных характеристик, полученные из предварительного SST RANS расчета течения в пограничном слое, а давление экстраполировалось на входную границу из внутренних точек области. Толщина пограничного слоя во входном сечении соответствовала экспериментальному

значению равному $\delta_0 = 1.1 H$. На стенках канала использовались условия прилипания, на выходной границе задавалось постоянное значение статического давления, а остальные переменные экстраполировались изнутри расчетной области. Наконец, в трансверсальном направлении использовались условия периодичности.

Шаг интегрирования по времени был равен $2 \cdot 10^{-2} H/U_0$, что обеспечивало значение числа Куранта меньше единицы в большей части расчетной области. Общее время расчета составляло 500 конвективных времен H/U_0 (25 времен проноса через область, расположенную вниз по потоку от уступа), 200 из которых были необходимы для получения статистически установившегося решения, а 300 – для накопления данных для получения статистических характеристик потока.

Результаты расчетов

Как видно из левой рамки на Рис. 87, где показана визуализация результатов расчетов рассматриваемого течения с использованием DDES, задержка формирования развитых трехмерных структур на начальном участке слоя смешения проявляется весьма ярко: они практически отсутствуют вплоть до $x \approx 2 H$. В противоположность этому, при использовании обоих предложенных методов (SST σ -DDES и SST DDES в сочетании подсеточным масштабом Δ_{SLA}) формирование трехмерных структур происходит очень быстро (см. среднюю и правую рамки на Рис. 87). Кроме того, как в зоне рециркуляции, так и в присоединившемся к нижней стенке пограничном слое (эта зона на рисунке не показана) при использовании этих методов разрешаются более мелкие турбулентные структуры.

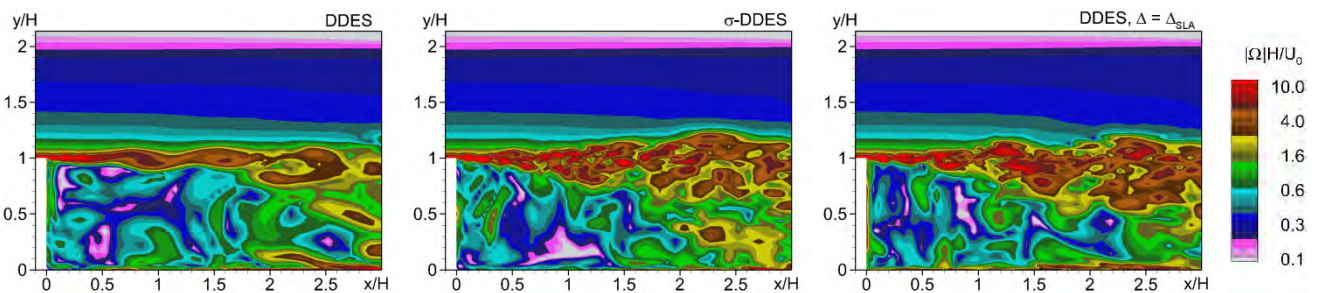


Рис. 87. Мгновенные поля безразмерного модуля завихренности, полученные SST DDES подходом, методом σ -DDES и методом DDES в сочетании подсеточным масштабом Δ_{SLA} .

В результате достигается значительное улучшение согласования средних характеристик течения с экспериментальными данными. В частности, использование предложенных модификаций DDES позволило намного точнее предсказать длину зоны рециркуляции за уступом и распределение коэффициента трения вдоль нижней стенки канала (Рис. 88), а также существенно повысить точность расчета профилей продольной компоненты скорости и интенсивности ее пульсаций вниз по потоку от уступа (Рис. 89).

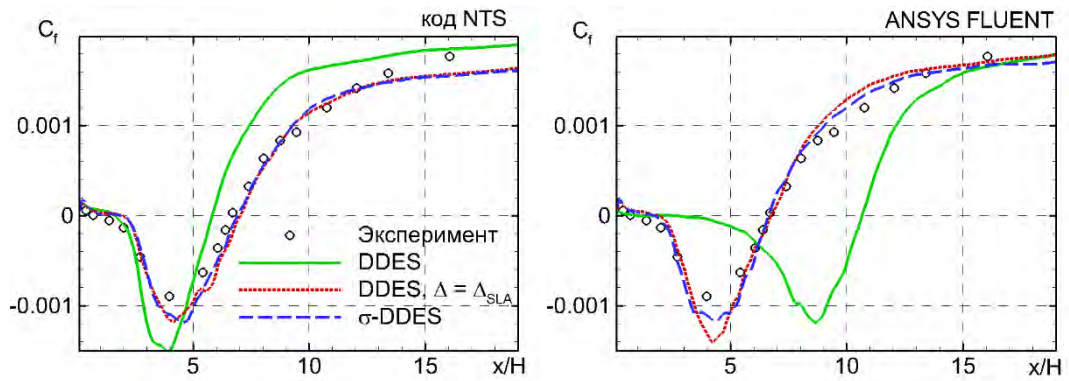


Рис. 88. Сравнение расчетных распределений коэффициента трения за уступом, полученных в рамках кода NTS и ANSYS FLUENT, с экспериментальными данными.

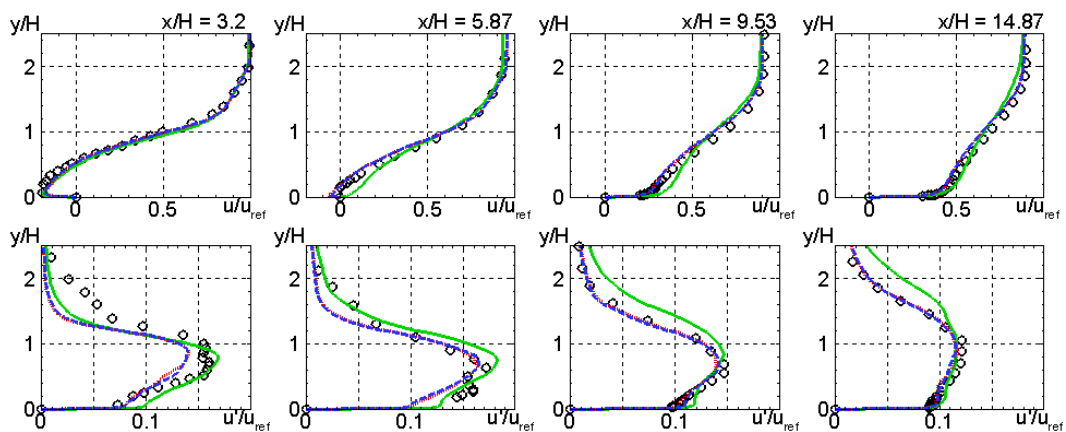


Рис. 89. Сравнение расчетных профилей продольной скорости и ее пульсаций, полученных с использованием кода NTS, с экспериментальными данными (см. легенду на Рис. 88).

Наконец, сравнение результатов расчетов с помощью кодов NTS и ANSYS FLUENT (Рис. 88) показало, что результаты SST σ -DDES и SST DDES Δ_{SLA} практически не зависят от используемого кода. В противоположность этому, при использовании стандартной версии DDES между двумя кодами имеет место существенное различие. Это объясняется тем, что при использовании стандартной версии DDES длина области перехода к развитой турбулентности в оторвавшемся от уступа слое смешения, а, следовательно, и результаты расчета в целом являются крайне чувствительными к уровню диссипации используемого численного метода (в ANSYS FLUENT он значительно выше, чем в NTS коде).

Таким образом, результаты расчетов течения в канале с обратным уступом позволяют констатировать существенное превосходство предложенных модификаций SST DDES над его оригинальной версией не только с точки зрения точности, но и с точки чувствительности к используемому численному методу.

3.3.2.2. Обтекание двумерной выпуклости на плоской поверхности

Данное течение сочетает в себе простую геометрию с физической сложностью. В частности, оно характеризуется наличием отрыва пограничного слоя от обтекаемой гладкой поверхности, вызванного неблагоприятным градиентом давления, образованием относительно небольшой зоны рециркуляции, присоединением оторвавшегося слоя смещения к плоской стенке и постепенным формированием на ней развитого турбулентного пограничного слоя далее вниз по потоку. Экспериментальное исследование [277] и расчет этого течения с использованием LES [278] позволили получить надежные данные по полям не только его осредненных, но и пульсационных характеристик. Все это делает данное течение весьма привлекательным и содержательным тестом, который включен в верификационную базу данных NASA [41] и широко используется для оценки точности как RANS моделей турбулентности, так и гибридных RANS-LES подходов (см., например, [194], [279], [280]).

Постановка задачи

Схема экспериментальной установки представлена на Рис. 90. Экспериментальная модель представляла собой канал прямоугольного сечения, на нижней стенке которого располагалась выпуклость длиной c и высотой $h = 0.128 c$, имитирующая половину аэродинамического профиля. Число Рейнольдса, построенное по длине выпуклости и максимальной скорости во входном сечении, U_0 , было равно $9.36 \cdot 10^5$, а число Маха – 0.1, что позволяет пренебречь эффектами сжимаемости.

Для учета эффекта загромождения потока (*blockage effect*) верхняя граница расчетной области была искривлена согласно рекомендациям [41]. Размер и форма расчетной области, а также сетка в плоскости XY (ее размер равен 510×126) представлены на Рис. 91. Сетка была измельчена по направлению к поверхности модели ($\Delta y_1^+ < 1$) и удовлетворяла известным требованиям к сеткам для WMLES.

Размер расчетной области в поперечном направлении составлял $L_z = 0.4 c$, а размер шага сетки по трансверсальной («гомогенной») координате Δz был равен $5 \cdot 10^{-3} c$, что приводит к практически кубическим ячейкам в оторвавшемся слое смещения. Общее число ячеек сетки составляло около $5 \cdot 10^6$.

На входной границе расчетной области, расположенной в сечении $x/c = -2.14$, задавались профили скорости (Рис. 92) и турбулентных характеристик, полученные с помощью предварительного SST RANS расчета течения в плоском пограничном слое, а давление определялось путем линейной экстраполяции изнутри расчетной области. Число Рейнольдса, построенное по

толщине потери импульса входного профиля скорости, было равно измеренному в экспериментах значению $Re_\theta = \theta U_0/\nu = 7200$.

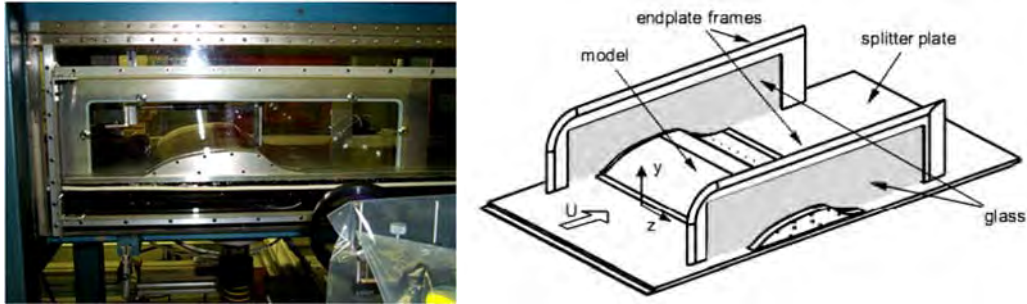


Рис. 90. Фотография и схема экспериментальной установки [277].

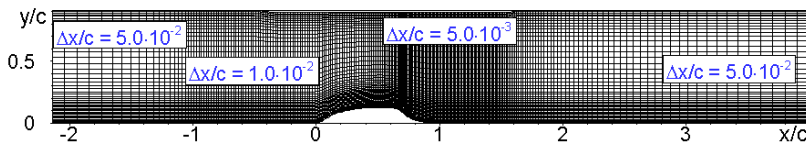


Рис. 91. Расчетная область и сетка в плоскости XY, использованные для расчетов обтекания выпуклости, расположенной на пластине (показана каждая вторая линия сетки).

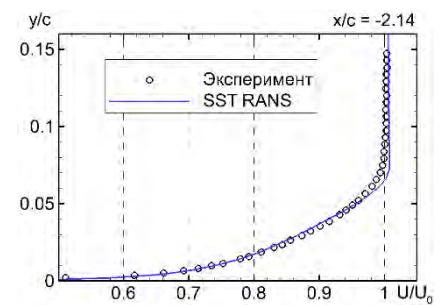


Рис. 92. Профиль скорости на входе в расчетную область.

На верхней границе расчетной области в соответствии с рекомендациями [41] использовались условия свободного скольжения («симметрии»), а на твердой стенке – условия прилипания. На выходной границе, расположенной в сечении $x/c = 4$, задавалось постоянное значение давления, а значения остальных переменных экстраполировались из расчетной области. Наконец, в трансверсальном направлении использовались периодические граничные условия.

Шаг интегрирования по времени составлял $0.002 c/U_0$, что обеспечивало значения числа Куранта около 0.5 и меньше во всей расчетной области. Время выхода течения на статистически установившийся режим составляло $10 c/U_0$, а для накопления данных, необходимых для расчета осредненных характеристик потока, использовался временной промежуток $20 c/U_0$.

Результаты расчетов

Расчеты показали, что как и в случае обтекания обратного уступа, рассмотренного в предыдущем разделе, использование предложенных модификаций DDES приводит к быстрому формированию разрешенных трехмерных турбулентных структур в оторвавшемся от обтекаемой выпуклости слое смешения независимо от используемого расчетного кода (Рис. 93). Помимо этого, как и в канале с внезапным расширением, модифицированные версии DDES позволяют

разрешить более мелкие турбулентные структуры как в зоне рециркуляции, так и в области, лежащей вниз по потоку от точки присоединения слоя смешения к плоской поверхности.

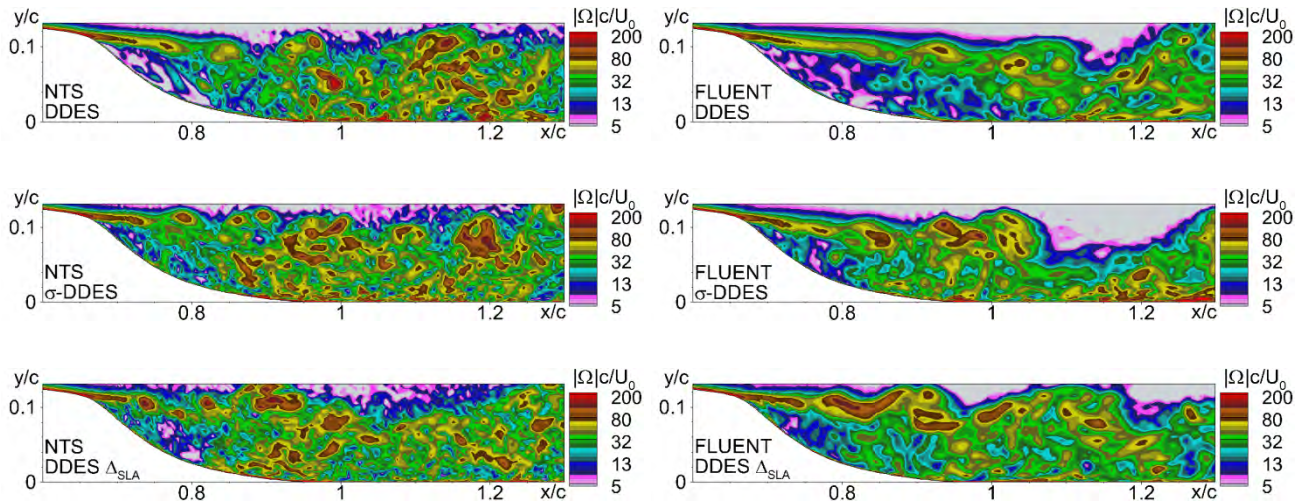


Рис. 93. Мгновенные поля безразмерного модуля завихренности, полученные с помощью стандартного SST DDES и его модификаций σ -DDES и DDES Δ_{SLA} при использовании кодов NTS и ANSYS FLUENT.

Для количественной оценки эффективности предложенных модификаций было проведено сравнение спектров пульсаций продольной компоненты скорости в двух точках слоя смешения (их положение показано на Рис. 94), полученных с их помощью и в рамках двухэтапного зонного RANS-IDDES подхода, в котором проблема перехода от RANS к LES в оторвавшемся слое смешения отсутствует, поскольку пограничный слой перед отрывом населен разрешенными турбулентными структурами.

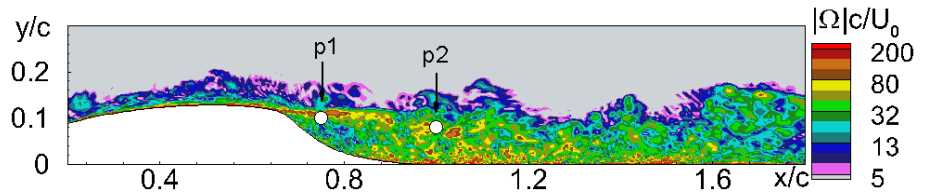


Рис. 94. Мгновенное поле безразмерного модуля завихренности, полученное зонным RANS-IDDES подходом, и точки, в которых проводилось сравнение спектров пульсаций скорости.

Анализ спектров в точке **p1**, расположенной в самом начале слоя смешения (они показаны в левой рамке Рис. 95), свидетельствует о том, что все варианты метода DDES предсказывают наличие локальных максимумов в спектрах. В противоположность этому, спектр, полученный зонным методом, является гладким, и имеет выраженный участок, соответствующий инерционному интервалу чисел Струхала (закону « $-5/3$ »). Наличие максимумов связано с процессом сворачивания оторвавшегося слоя смешения и дальнейшим объединением образующихся при этом двумерных вихрей. При использовании предложенных модификаций DDES положение этих максимумов смещается в сторону высоких частот, что свидетельствует о более раннем начале сворачивания слоя смешения. В результате, спектр в точке **p1**, рассчитанный в рамках метода DDES Δ_{SLA} , оказывается наиболее близким к спектру, рассчитанному с помощью зонного метода. Это свидетельствует о

том, что при расчете рассматриваемого течения он является несколько более точным, чем метод σ -DDES.

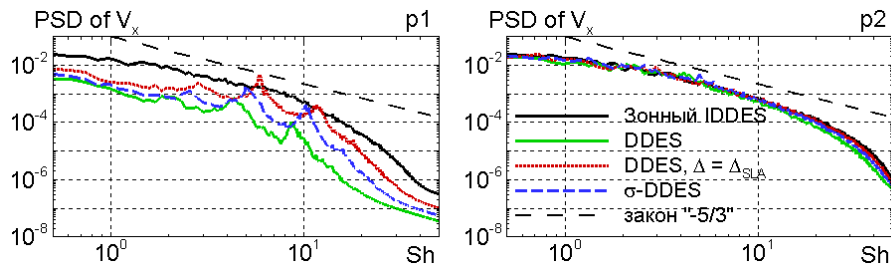


Рис. 95. Сравнение пульсаций спектров продольной составляющей скорости, полученных различными методами, в точках p1 (0.75, 0.1) и p2 (1.0, 0.08) (результаты NTS кода).

Что касается спектров в точке **p2**, расположенной значительно ниже по потоку, чем точка **p1**, то они практически не зависят от используемого метода, являются широкополосными и имеют выраженные участки, соответствующие инерционному интервалу. Это свидетельствует о том, что согласно всем моделям процесс формирования развитой трехмерной турбулентности в слое смешения уже завершен.

Существенный положительный эффект, связанный с сокращением участка RANS-LES перехода благодаря использованию модифицированных версий DDES, наглядно иллюстрируют Рис. 96 и Рис. 97, из которых видно, что использование этих версий приводит к значительному улучшению согласования с экспериментом как осредненных, так и пульсационных характеристик течения. В частности, независимо от используемого расчетного кода модифицированные версии DDES значительно точнее предсказывают экспериментальное распределение коэффициента трения в зоне рециркуляции и присоединившемся пограничном слое (Рис. 96). При этом результаты, полученные с использованием подсеточного масштаба, адаптированного к слоям смешения, лучше согласуются с экспериментом и меньше зависят от расчетного кода, чем результаты σ -DDES, что объясняется обсуждавшимся выше более быстрым переходом от RANS к LES в рамках этого метода.

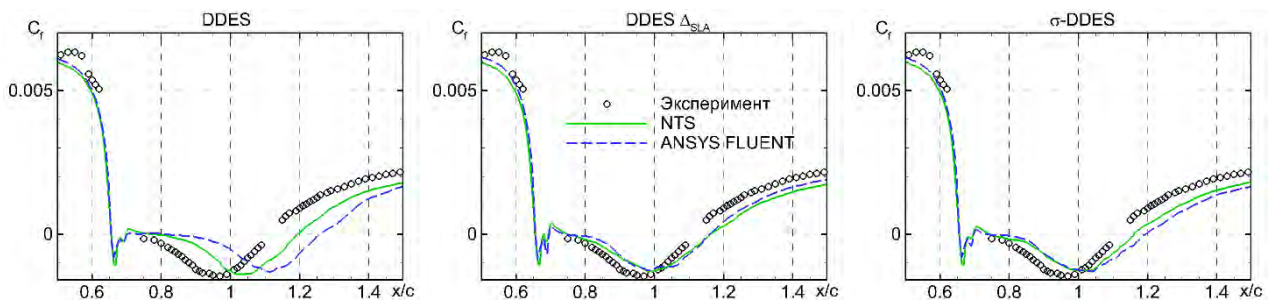


Рис. 96. Сравнение осредненных коэффициентов трения, полученных различными методами с использованием NTS кода и ANSYS FLUENT, с экспериментальными данными.

Аналогичные выводы следуют также из представленного на Рис. 97 сравнения результатов расчетов напряжений Рейнольдса с экспериментом. Из рисунка видно, что на начальном участке оторвавшегося слое смешения (сечения $x = 0.8c$, $x = 0.9c$) уровень разрешенных реynoльдсовых напряжений, предсказанных стандартным методом DDES, существенно занижен, в то время как применение метода DDES Δ_{SLA} обеспечивает хорошее согласование расчета с экспериментом.

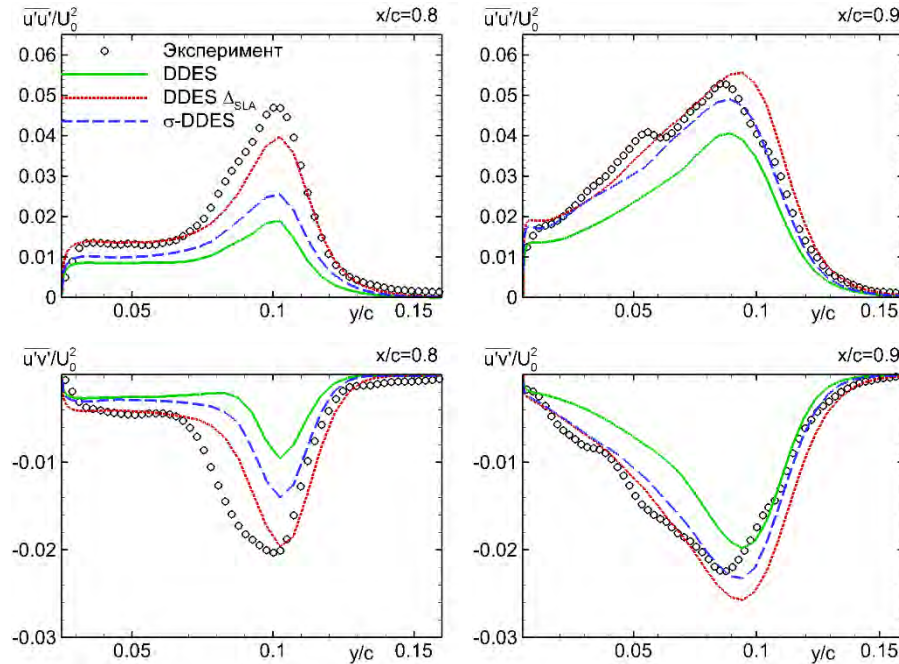


Рис. 97. Сравнение профилей нормальных (сверху) и касательных (снизу) разрешенных реynoльдсовых напряжений, полученных с использованием различных версий DDES (результаты NTS кода), с экспериментальными данными.

Таким образом, как и в задаче об обтекании обратного уступа, обе модификации DDES подхода ускоряют RANS-LES переход в слое смешения, что приводит к более точному предсказанию осредненных и пульсационных характеристик течения. Однако в данной задаче использование DDES с подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения, оказалось заметно более эффективным, чем использование метода σ -DDES.

3.3.2.3. Сверхзвуковое продольное обтекание цилиндра с донным срезом

Существенными особенностями данного течения по сравнению с течениями, рассмотренными ранее, являются его сверхзвуковой характер и цилиндрическая (а не плоская) форма отрывающегося от поверхности слоя смешения, в связи с чем его расчет позволяет значительно расширить валидационную базу предложенных модификаций метода DDES. Кроме того, точность предсказания сопротивления тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком, существенно зависит от точности предсказания донного давления и характеристик турбулентного следа за телом. В связи с этим моделирование подобных течений представляют значительный практический интерес.

Постановка задачи

Рассматривается сверхзвуковое продольное обтекание цилиндрического тела с плоским донным срезом (Рис. 98), экспериментальное исследование которого представлено в работе [281]. Это течение является достаточно представительным примером течений в донной области и использовалось для тестирования моделей турбулентности в рамках европейского проекта DESIDER [282] и в ряде других исследований (см., например, [139], [283]).

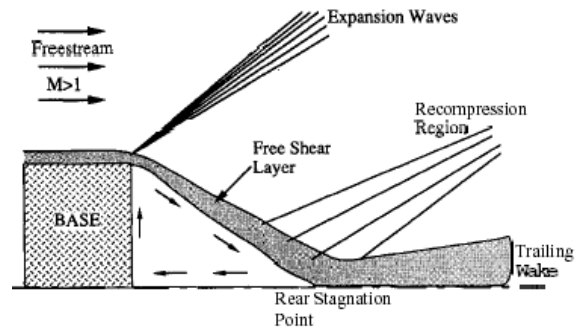


Рис. 98. Схема течения в донной области цилиндрического тела (из [281]).

Число Рейнольдса, построенное по радиусу цилиндра R и скорости набегающего потока U_∞ , в эксперименте составляло $1.63 \cdot 10^6$, а число Маха набегающего потока - 2.46.

Расчетная область включала в себя область вокруг цилиндра и след за ним (Рис. 99). На ее входной границе ($x/R = -4$) задавались профили скорости, турбулентных характеристик и температуры, полученные с помощью предварительного SST RANS расчета пограничного слоя на цилиндре и обеспечивающие совпадение толщины пограничного слоя с ее экспериментальным значением в сечении $x/R = -0.0315$ (Рис. 100).

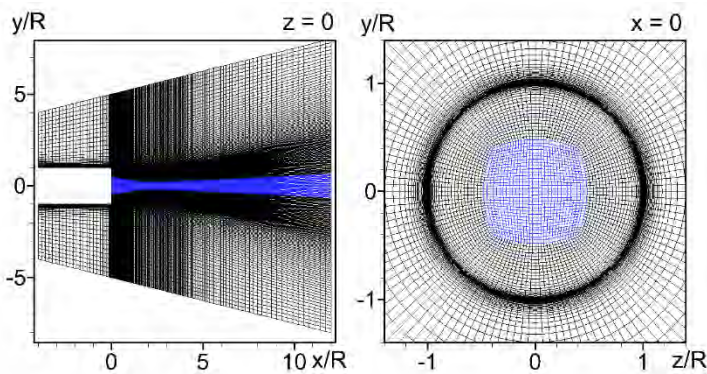


Рис. 99. Расчетная области и сетка в плоскости XY в сечении $z/R = 0$ и увеличенный фрагмент сетки в плоскости YZ в сечении $x/R = 0$.

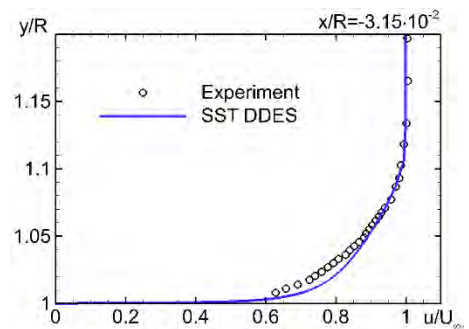


Рис. 100. Сравнение профиля скорости, полученного в расчете SST DDES, с экспериментальным профилем [281] перед донным срезом ($x/R = -0.0315$).

Расчетная сетка состояла из двух (внешнего и внутреннего) перекрывающихся блоков, ячейки которых в области перекрытия были близки по размеру. Во внешнем блоке использовалась цилиндрическая сетка, а во внутреннем - декартова (введение внутреннего блока необходимо для того, чтобы избежать сингулярности на оси симметрии при проведении трехмерных расчетов). Шаги сетки сгущались в слое смешения и при приближении к стенкам цилиндра для

разрешения вязкого подслоя ($\Delta y_1^+ < 1$). Общее число ячеек сетки составляло примерно $3.8 \cdot 10^6$ (размер внутреннего блока - $209 \times 34 \times 34$, а внешнего - $253 \times 107 \times 13$).

Шаг интегрирования по времени был равен $\Delta t = 6 \cdot 10^{-3} R/U_\infty$, что обеспечивало значение числа Куранта меньше 1 в большей части расчетной области. Период выхода течения на статистически установившийся режим составлял $50 R/U_\infty$, а для накопления данных, необходимых для статистической обработки результатов, использовался временной интервал $200 R/U_\infty$.

Результаты расчетов

На Рис. 101 представлены визуализации результатов расчетов рассматриваемого течения, полученные с использованием стандартного и модифицированных методов DDES. Из него следует, что применение стандартного DDES, как и во всех рассмотренных выше примерах, приводит к практически стационарному, RANS-подобному решению в слое смешения, а разрешенные турбулентные структуры появляются только в зоне рециркуляции и в следе за цилиндром на расстоянии порядка 2-3 радиусов от его донного среза. В противоположность этому, применение предложенных модификаций DDES приводит к значительно более быстрому развитию разрешенных турбулентных структур в слое смешения и, как следствие, к разрешению более мелких вихрей в зоне рециркуляции и в следе за цилиндром. Также видно, что при использовании DDES в сочетании с подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения, RANS-LES переход происходит быстрее, чем в решении, полученном с использованием σ -DDES метода.

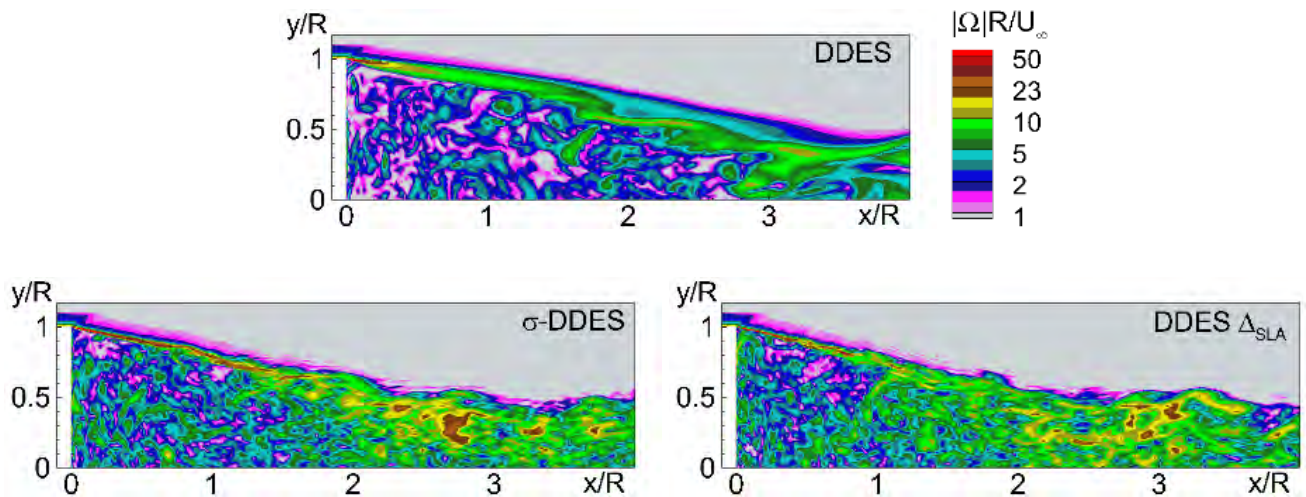


Рис. 101. Мгновенные поля безразмерного модуля завихренности, полученные с использованием стандартного метода DDES, σ -DDES и DDES в сочетании подсеточным масштабом Δ_{SLA} .

Отмеченная разница скорости формирования трехмерных структур, наблюдаемая при использовании трех рассматриваемых методов, существенно влияет на результаты расчетов осредненных характеристик течения. Так, распределения давления вдоль донного среза цилиндра и

скорости в следе за ним более точно предсказываются модифицированными версиями DDES, причем в этом отношении предпочтительным оказывается метод σ -DDES (Рис. 102).

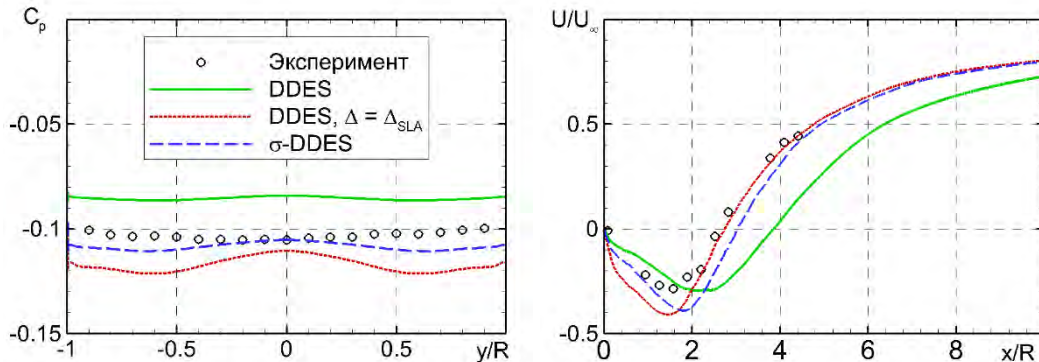


Рис. 102. Сравнение радиального распределения коэффициента давления и распределения скорости вдоль оси следа, полученных различными методами, с экспериментальными данными [281].

Точность предсказания радиальных профилей средней скорости в слоях смешения с использованием модифицированных подходов в целом также оказывается выше точности стандартного метода DDES (Рис. 103). Однако в зоне рециркуляции, формирующейся за донным срезом, скорость возвратного течения, предсказываемая всеми рассмотренными методами, заметно отличается от результатов эксперимента. В частности, в расчетах эта скорость увеличивается при приближении к оси симметрии, а в эксперименте является практически постоянной. При этом абсолютная величина скорости возвратного течения на оси следа (Рис. 102), полученная методом DDES с использованием масштаба Δ_{SLA} , оказалось существенно завышенной, а результаты стандартного DDES и его σ -модификации несколько лучше согласуются с экспериментальными данными. Следует отметить, что тенденция к завышению скорости возвратного течения в зоне рециркуляции вблизи оси следа наблюдается и в других работах (см., например, [283]), однако причины этого остаются неясными и возможно связаны с погрешностями измерения скорости в этой области.

Наконец, сравнение с экспериментальными данными расчетных профилей касательных напряжений в следе за цилиндром, полученных с использованием различных версий DDES (Рис. 103), свидетельствует о том, что хотя применение предложенных модификаций этого метода и обеспечивает заметное улучшение согласования результатов расчета с экспериментом, различие между ним остается весьма заметным.

В целом можно заключить, что применение предложенных модификаций метода DDES, предназначенных для ускорения RANS-LES перехода в оторвавшихся от обтекаемой поверхности слоях смешения, значительно повышает точность расчета рассматриваемого течения. Однако, использование DDES в сочетании с подсеточным масштабом, адаптированным к слоям

смещения, приводит к завышению скорости возвратного течения в зоне рециркуляции ($x/R < 2$), в связи с чем в этой области предпочтительной оказывается σ -DDES модель. В тоже время, далее вниз по потоку лучшее согласование с экспериментом достигается при использовании DDES в сочетании с подсеточным масштабом Δ_{SLA} .

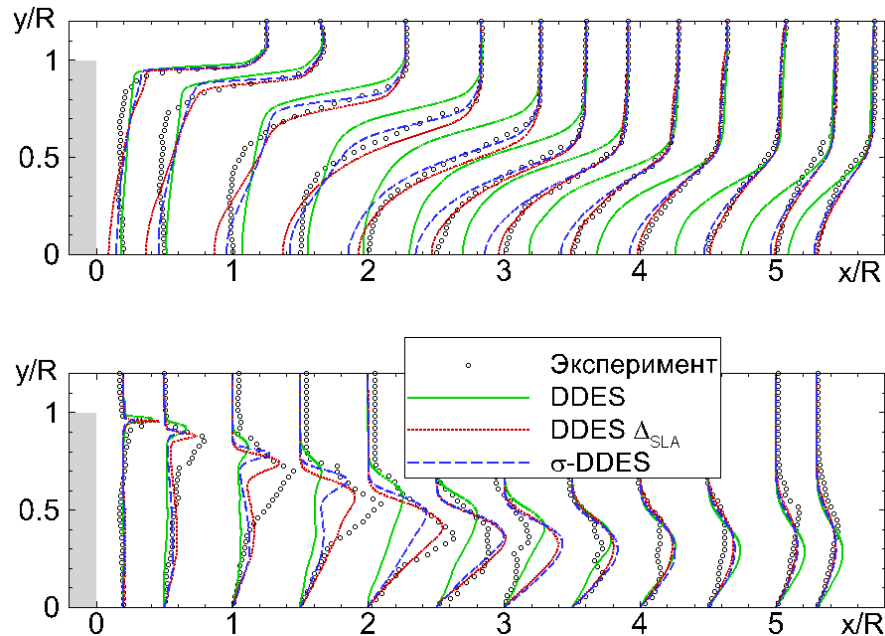


Рис. 103. Сравнение профилей средней продольной скорости (сверху) и касательных напряжений (снизу), полученных различными методами, с экспериментальными данными [281].

3.3.3. ТЕСТИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИМЕНЕНИЯ ЗОННЫХ RANS-LES ПОДХОДОВ

Тестирование предложенной в разделе 3.1.3 технологии применения зонных RANS-LES подходов с использованием объемного источника турбулентности проводилось на примере расчета сжимаемого пограничного слоя на плоской пластине. Данное классическое течение является обязательным тестом для любых зонных гибридных RANS-LES методов, в рамках которых необходимо создание искусственных турбулентных пульсаций в области перехода от RANS к LES.

Постановка задачи

Расчет течения в сжимаемом пограничном слое на плоской пластине был проведен при числе Рейнольдса $Re = 1.735 \cdot 10^4$, построенном по толщине пограничного слоя в начале LES подобласти δ_0 и скорости во внешнем потоке U_∞ , и числе Маха $M_\infty = 0.5$. Расчетная область являлась прямоугольным параллелепипедом с немного скошенной верхней границей для исключения смены на ней типа граничных условий со входных на выходные. Размер расчетной области составлял $120\delta_0 \times 100\delta_0 \times 6\delta_0$ (значение координаты x меняется от $-60\delta_0$ до $60\delta_0$), граница между

RANS и LES зонами (начало области VS) находилась в сечении с координатой $x = 0$ (Рис. 104), а длина области VS составляла $3\delta_0$.

Для сравнения были проведены расчеты с использованием двухстадийного гибридного подхода, при этом на втором этапе на входе в LES подобласть ($x = 0$) для генерации турбулентности использовались NTS STG [194] и метод вихрей (VM) [284].

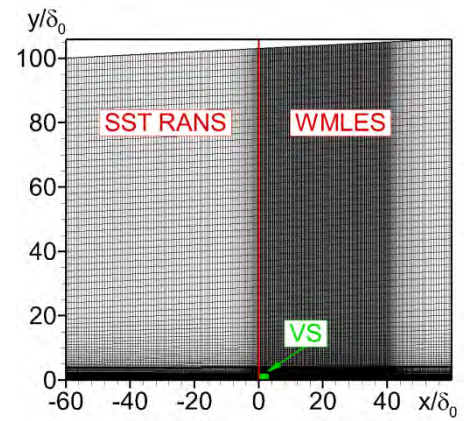


Рис. 104. Расчетная область и сетка в плоскости XY для задачи о пограничном слое.

В качестве граничных условий на верхней и входной границах задавались однородные профили скорости и турбулентных характеристик, а давление определялось путем экстраполяции из внутренних точек области. На выходной границе давление полагалось постоянным, а остальные переменные экстраполировались. Наконец, на стенке использовались условия прилипания и адиабатичности, в направлении z – условие периодичности.

Параметры расчетной сетки в LES области соответствовали требованиям для проведения LES с пристеночным RANS моделированием: в направлениях x и z шаги сетки являются равномерными ($\Delta x/\delta_0 = 1/10$ и $\Delta z/\delta_0 = 1/20$), сетка по y была сгущена к стенке ($\Delta y_1^+ \approx 0.7$), а ее максимальный шаг внутри пограничного слоя был равен $\Delta y_{\max}^+/\delta_0 = 1/20$. Общий размер сетки составил $1.33 \cdot 10^6$ ячеек. Безразмерный шаг интегрирования по времени Δt был равен $0.04 \cdot \delta_0/U_\infty$, что обеспечивало число Куранта $CFL < 0.5$ во всей расчетной области. Время выхода течения на статистически установившийся режим составляло $200 \cdot \delta_0/U_\infty$ (примерно четыре времени проноса потока через LES подобласть), осреднение проводилось по времени и однородному направлению z (период осреднения по времени был равен $250 \cdot \delta_0/U_\infty$).

Результаты расчетов

Визуализация течения (Рис. 105) свидетельствует о том, что разрешенные турбулентные структуры постепенно развиваются в области действия объемного источника VS и что в дальнейшем (вниз по потоку от ее конца) их изменение оказывается несущественным. Это свидетельствует о формировании на выходе из зоны VS развитой трехмерной турбулентности.

Сравнение продольных распределений коэффициента трения на поверхности пластины (левая рамка на Рис. 106) и профилей средней скорости в ее различных сечениях (Рис. 107), полученных с использованием различных методов создания турбулентного контента на входе в LES область, свидетельствует о том, что результаты предложенного одностадийного подхода с ис-

пользованием объемного источника не уступают по точности результатам двухстадийного подхода с использованием NTS STG. Следует также отметить, что даже в области VS ($0 \leq x/\delta_0 \leq 3$), где происходит постепенное формирование турбулентных структур, точность предложенного подхода оказывается сравнительно высокой. Что касается метода вихрей (VM), используемого по умолчанию в ANSYS FLUENT, он существенно уступает по точности предложенному методу, который, как и метод VM, может быть легко реализован в кодах, работающих на неструктурированных сетках.

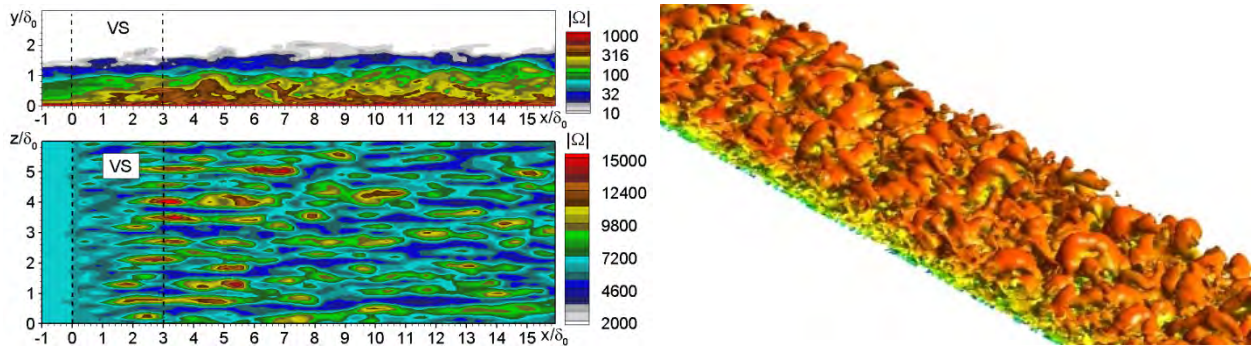


Рис. 105. Мгновенное поле безразмерного модуля завихренности в плоскости XY и на поверхности пластины и изоповерхность Q-критерия [285].

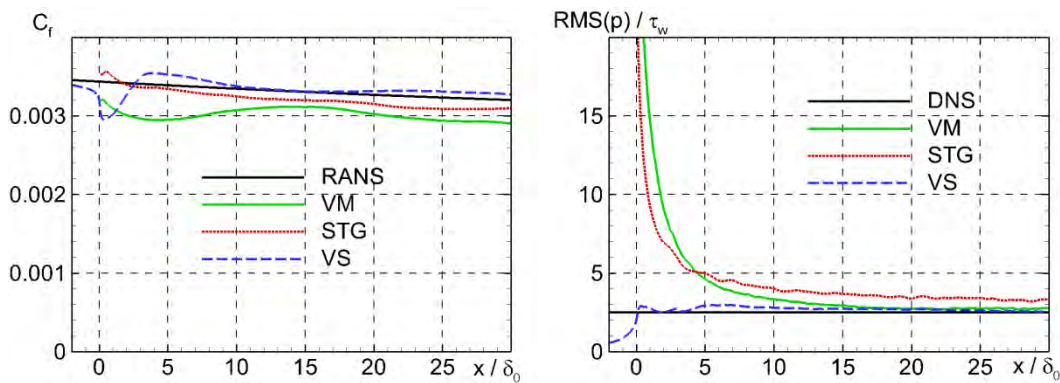


Рис. 106. Продольные распределения коэффициента трения и среднеквадратичных пульсаций давления вдоль плоской пластины.

Однако наиболее существенным преимуществом метода объемного источника VS по сравнению с методами NTS STG и VM является отсутствие ложного шума, обусловленного внезапным появлением турбулентных пульсаций. Об этом свидетельствует правая рамка Рис. 106, в которой представлено продольное распределение среднеквадратичных пульсаций давления, рассчитанных с использованием всех трех методов. Из него видно, что создание синтетических турбулентных пульсаций посредством объемного источника обеспечивает плавный рост пульсаций давления до значений, соответствующих эмпирической корреляции и результатам DNS (см., например, [286]). В то же время, при использовании методов VM и NTS STG в сечении, где они

расположены, происходит резкий рост интенсивности пульсаций давления. Указанное преимущество является принципиальным при решении задач аэроакустики.

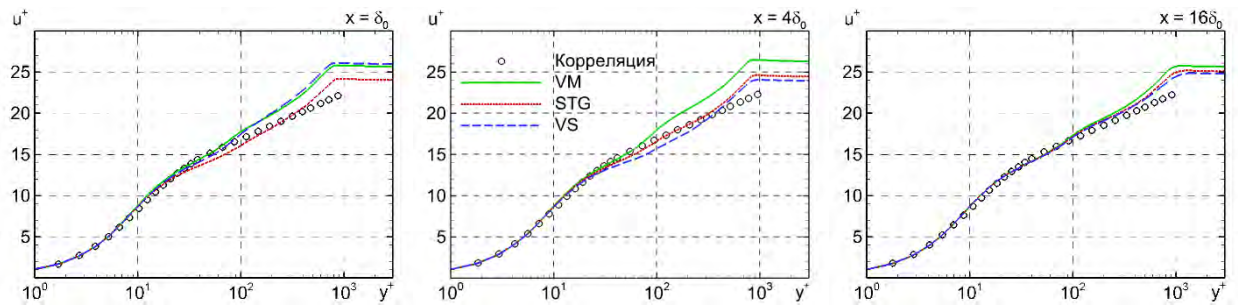


Рис. 107. Сравнение профилей средней скорости, рассчитанных с использованием различных методов создания турбулентного контента на входе в LES область в рамках зонных гибридных подходов, с эмпирической корреляцией Рейхарда [274] (3.20).

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНЫХ RANS-LES ПОДХОДОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В данной главе представлены результаты расчетов некоторых сложных пристеночных течений, полученные автором с использованием гибридных RANS-LES моделей в процессе работы над диссертацией. Ряд других аналогичных результатов, не включенных в диссертацию из-за ее ограниченного объема, опубликован в работах [287], [288] (расчет пристеночных пограничных слоев при наличии градиента давления), [289] (расчет обтекания крылового профиля NASA0021 под углом атаки 60°), [290] (расчет обтекания задней кромки гидрокрыла), [291] - [294] (расчет течения в Т-образном соединении труб) [234], [295] (расчет течения в сборке тепловыделяющих элементов).

4.1. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТАНДЕМА ЦИЛИНДРОВ

Течение, формирующееся при поперечном обтекании тандема цилиндров, обладает рядом сложных физических особенностей, характерных для реальных комплексных конфигураций, таких как шасси самолета, механизированное крыло и т. п. Такими особенностями являются отрыв турбулентного пограничного слоя от первого цилиндра, формирование за ним нестационарного следа и взаимодействие этого следа со вторым цилиндром с последующим обширным отрывом. Кроме того, для этого течения в литературе имеются достаточно надежные и детальные экспериментальные данные [10], [296] - [298]. В частности, специалистами NASA были измерены не только аэродинамические, но и акустические характеристики потока, использовавшиеся впоследствии для оценки точности методов расчета шума [298] - [300]. Наконец, немаловажным является то обстоятельство, что данное течение было выбрано в качестве одного из тестов для оценки возможностей существующих методов расчета турбулентных течений в рамках проекта Евросоюза АТААС [11] и рабочих семинаров NASA BANC-I и BANC-II [301].

Представленные ниже результаты расчетов были опубликованы в соавторстве с Ф. Спалартом, М.Х. Стрельцом и М.Л. Шуром в работе [302].

Постановка задачи

Наиболее полное экспериментальное исследование обтекания тандема цилиндров и его шума выполнено в аэродинамических трубах BART (*Basic Aerodynamic Research Tunnel*) и QFF (*Quiet Flow Facility*) исследовательского центра NASA Langley. Первая из них имеет прямоугольную закрытую измерительную секцию размером $12.4D \times 17.78D$ ($D = 0.05715$ м – диаметр цилиндров), а вторая труба (в ней производились измерения шума) является трубой с открытой

измерительной секцией, в которой tandem цилиндров устанавливался вниз по потоку от прямогоугольного сопла между двух пластин, расположенных на расстоянии $16D$ друг от друга. В обеих сериях экспериментов расстояние между центрами цилиндров tandem составляло $3.7D$, число Маха набегающего потока M_∞ было равно 0.1285 , а число Рейнольдса, построенное по скорости набегающего потока $U_\infty = 44$ м/с, Re_D составляло $1.66 \cdot 10^5$. Для обеспечения сверхкритического режима обтекания цилиндров, то есть перехода к турбулентности в присоединенных пограничных слоях при этом относительно низком значении числа Рейнольдса, в экспериментах на поверхности цилиндров вблизи передней критической точки устанавливались так называемые турбулизаторы. Большинство аэродинамических измерений выполнено на установке BART с использованием турбулизаторов на обоих цилиндрах. На установке QFF проводились измерения только нестационарного давления на поверхности цилиндров и шума, генерируемого tandemом в дальнем поле, причем часть опытов проводилась без использования турбулизаторов на заднем цилиндре tandem. В этой связи для сравнения результатов расчетов аэродинамических характеристик потока с экспериментальными данными в основном привлекаются результаты измерений на установке BART, а результаты измерений на установке QFF, относящиеся ко второму цилиндру и следу за ним, используются только в тех случаях, когда соответствующие эксперименты проводились с использованием турбулизаторов на обоих цилиндрах.

Постановка задачи в расчете соответствовала эксперименту, проводившемуся в трубе с открытой секцией (QFF). Внешняя граница расчетной области отстояла от цилиндров не менее чем на $30D$ (Рис. 108). Что касается размера расчетной области в поперечном направлении L_z/D , то в представленных ниже расчетах он принимался равным 1.5, 3, 6 и 16 (последнее соответствует реальной длине цилиндров в экспериментах, выполненных на установке QFF).

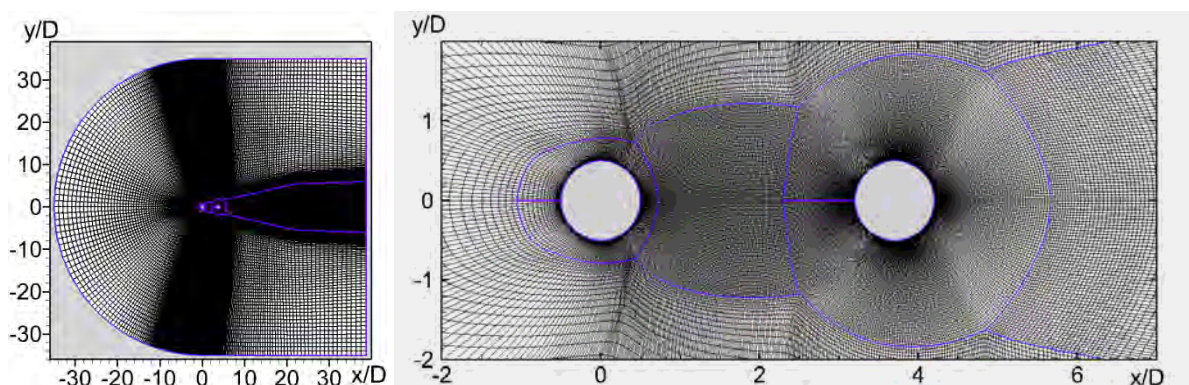


Рис. 108. Расчетная область и расчетная сетка в плоскости XY.

На проницаемых границах расчетной области (“входе” и “выходе”) использовались характеристические граничные условия [303], сформулированные относительно инвариантов Римана. Кроме того, для подавления отражений звуковых волн от этих границ и для предотвращения их

генерации при пересечении турбулентными структурами следа тандема выходной границы в расчетах использовались так называемые поглощающие слои [304]. Поскольку, благодаря использованию турбулизаторов, в экспериментах переход к турбулентности происходил в присоединенных пограничных слоях на поверхности цилиндров, все расчеты проводились с использованием так называемого “полностью турбулентного” подхода. В рамках этого подхода на входе в расчетную область задается достаточно высокий уровень турбулентности, обеспечивающий быструю турбулизацию потока в пограничном слое ($v_t/v = 0.1$, $k/U_\infty^2 = 6 \cdot 10^6$, $\omega D/U_\infty = 10$). На твердых стенках использовались условия прилипания и нулевого теплового потока, а в поперечном направлении (по оси z) использовались периодические граничные условия.

Использовавшаяся в расчетах сетка в плоскости XY (Рис. 108) была построена с учетом требований, предъявляемых к сеткам, предназначенным для расчета турбулентных течений в рамках глобальных гибридных RANS-LES методов [167]. Она содержит пять блоков: внешний блок, расположенный в области невязкого течения, три блока, расположенных в LES области, включающей зазор между цилиндрами и ближний след заднего цилиндра, и один блок в области его дальнего следа. Шаг сетки вдоль на поверхности переднего цилиндра составляли примерно $0.02D$ на его наветренной и $0.01D$ на подветренной стороне с плавным переходом от первого ко второму значению (общее число узлов на поверхности было равно 245). Поверхностная сетка на заднем цилиндре являлась равномерной и содержала 380 ячеек. Первый пристеночный шаг сетки в направлении нормали к стенке Δy_1 был выбран таким, чтобы его значение в единицах закона стенки Δy_1^+ не превышало 1, а затем увеличивался до значения приблизительно равного $0.02D$ в LES области. Далее шаги сетки в плоскости XY плавно увеличивались и вблизи внешней границы расчетной области достигали значения около $1.0D$ (общее число ячеек сетки в плоскости XY составило примерно 82000).

Сетка в направлении оси z являлась равномерной и имела шаг $\Delta z/D = 0.02$, что обеспечивало близкую к кубической форму ячеек в LES области. Таким образом, общее число ячеек сетки в расчетах составляло от примерно 6.2 (для $L_z/D = 1.5$) до 65 миллионов (для $L_z/D = 16$). При проведении расчетов использовалось дополнительное разбиение блоков сетки для ускорения расчетов за счет параллелизации. Шаг интегрирования по времени Δt составлял $4 \cdot 10^{-3} D/U_\infty$, что обеспечивало выполнение в LES области условия $CFL = U_\infty \Delta t / \Delta \approx 0.25$.

Для расчета шума, генерируемого при обтекании тандема в дальнем поле, использовался интегральный метод FWH [305], реализация которого в рамках NTS кода подробно описана в работах [304], [306]. Расчеты проводились методом IDDES [173]. При этом для аппроксимации невязких составляющих векторов потоков использовалась разработанная гибридная схема (см. раздел 2.3), в рамках которой зависящая от решения эмпирическая функция σ , определяющая вес

противопоточной аппроксимации, изменялась в диапазоне от задаваемой пользователем величины σ_{\min} в LES области до 1 в RANS области и в невязкой части потока. Проверка чувствительности решения к величине параметра σ_{\min} была одной из задач настоящего исследования.

Результаты расчетов

Визуализации полученных численных решений, примеры которых показаны на Рис. 109 и Рис. 110, позволяют сделать следующие выводы.

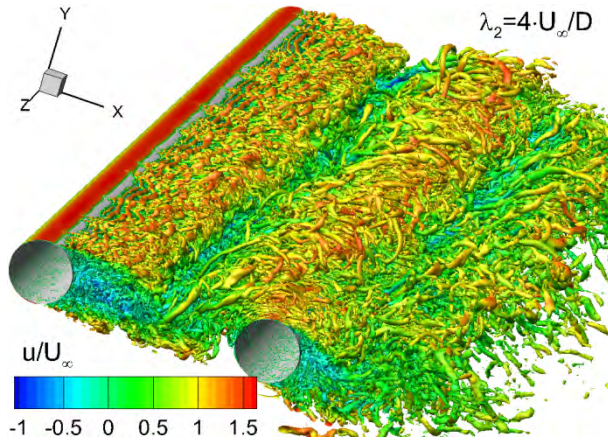


Рис. 109. Мгновенная изоповерхность величины закрутки (второе собственное число тензора градиента скорости) $\lambda_2 = 4$ из IDDES при $L_z/D = 16$.

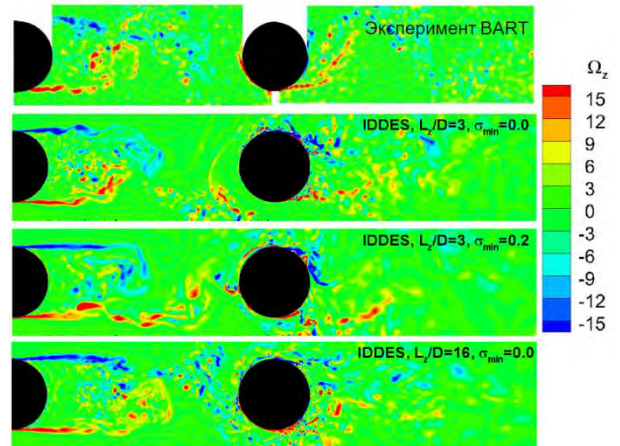


Рис. 110. Мгновенные поля z -составляющей вектора завихренности.

При использовании схемы с минимальной численной диссипацией ($\sigma_{\min} = 0.0$) IDDES обеспечивает качественно правильное описание структуры турбулентности в рассматриваемом течении и, в частности, предсказывает наличие в нем крупных квазикогерентных структур типа дорожки Кармана и относительно мелких хаотичных турбулентных вихрей, что особенно ясно видно на трехмерной визуализации решения IDDES, показанной на Рис. 109. При увеличении σ_{\min} до 0.2 размер минимальных разрешаемых вихревых структур увеличивается (Рис. 110). Кроме того, Рис. 110 свидетельствует о том, что в рамках IDDES изменение ширины расчетной области L_z и параметра σ_{\min} сказывается, главным образом, на конфигурации и устойчивости слоев смешения, отрывающихся от переднего цилиндра.

Отмеченное влияние L_z/D и σ_{\min} на турбулентные структуры естественно проявляется и в результатах расчетов основных параметров осредненного течения и статистических характеристик турбулентности (Рис. 111 - Рис. 114), которые получаются путем осреднения соответствующих нестационарных решений по времени и по координате z . Видно, что влияние на результаты расчетов величины L_z/D наиболее заметно проявляется при ее увеличении от 1.5 до 3.0 (дальнейший рост L_z/D сказывается на параметрах осредненного течения достаточно слабо). При этом

наиболее чувствительными к этому параметру оказываются характеристики потока в зазоре между цилиндрами (Рис. 112 - Рис. 114).

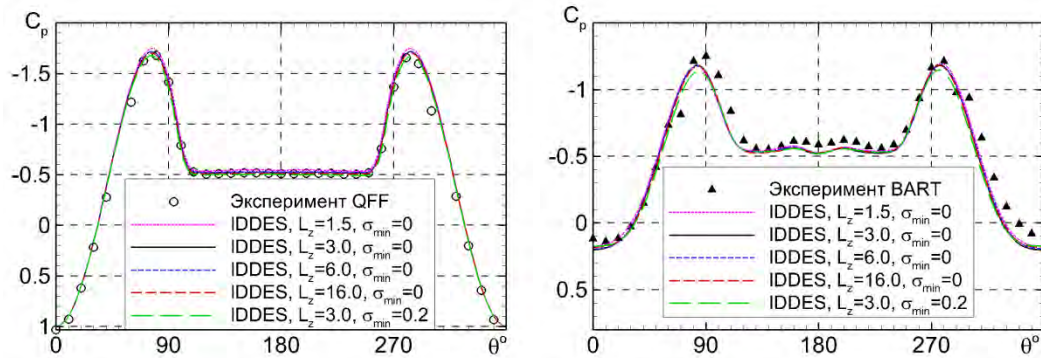


Рис. 111. Распределение коэффициента давления по поверхности переднего (слева) и заднего (справа) цилиндров.

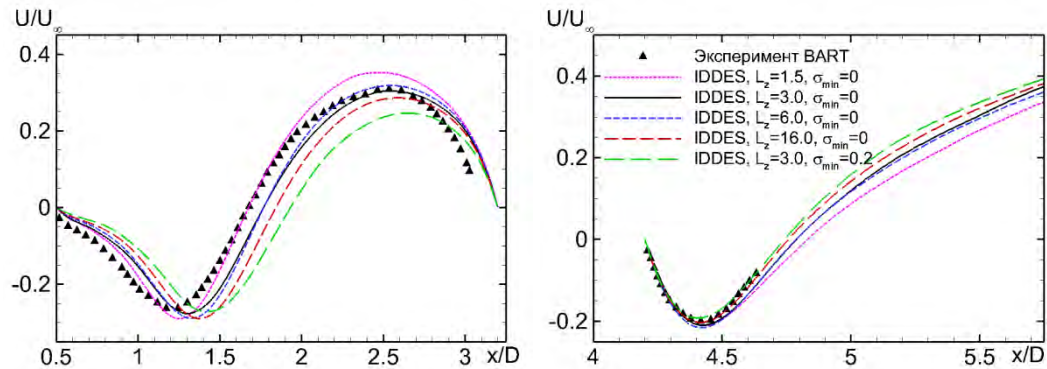


Рис. 112. Изменение продольной скорости вдоль плоскости симметрии тандема в зазоре между цилиндрами (слева) и в следе заднего цилиндра (справа).

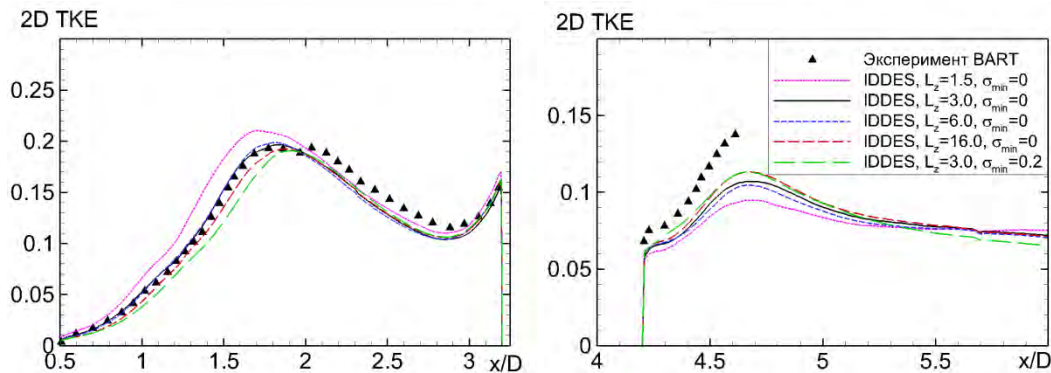


Рис. 113. Изменение безразмерной “двумерной” кинетической энергии турбулентности $0.5(u^2+v^2)/U_\infty^2$ вдоль плоскости симметрии в зазоре между цилиндрами (слева) и в следе заднего цилиндра (справа).

Аналогичные тенденции наблюдаются и при анализе нестационарных характеристик потока. В частности, распределения среднеквадратичных пульсаций давления по поверхности цилиндров (Рис. 115) и их спектры (Рис. 116) незначительно изменяются при $L_z/D \geq 3$ и, в целом,

хорошо согласуются с экспериментальными данными. Это, в частности, касается низкочастотного пика, соответствующего крупномасштабным колебаниям следа. Также видно (Рис. 117), что повышение диссипативности используемой численной схемы ($\sigma_{\min} = 0.2$) приводит к сокращению инерционного интервала в спектре, то есть протяженности его участка, подчиняющегося “закону $-5/3$ ” Колмогорова.

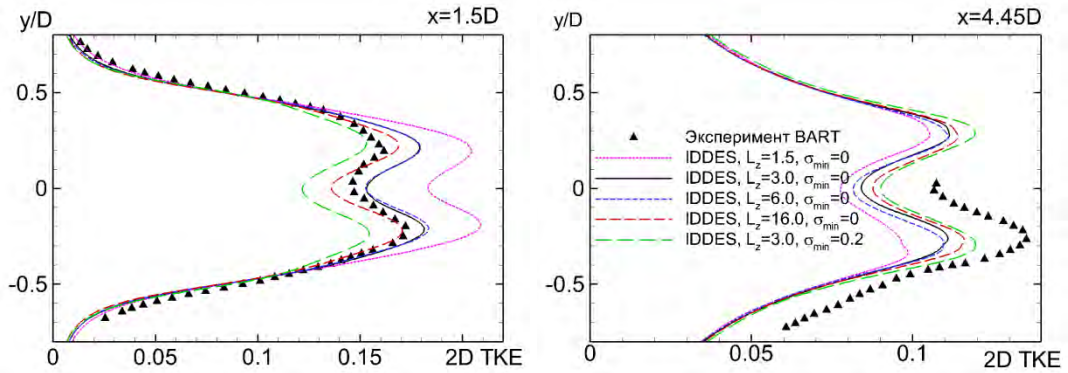


Рис. 114. Профили “двумерной” кинетической энергии турбулентности в зазоре между цилиндрами (слева) и в следе заднего цилиндра (справа).

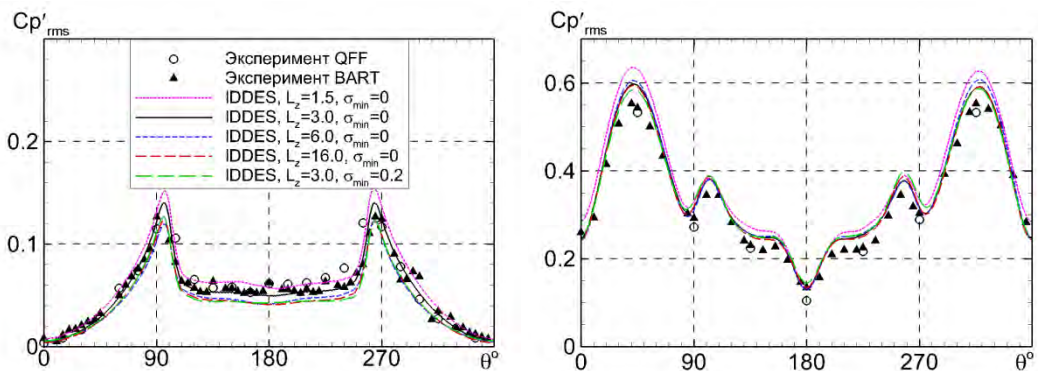


Рис. 115. Распределения среднеквадратичных пульсаций давления по поверхности переднего (слева) и заднего (справа) цилиндров.

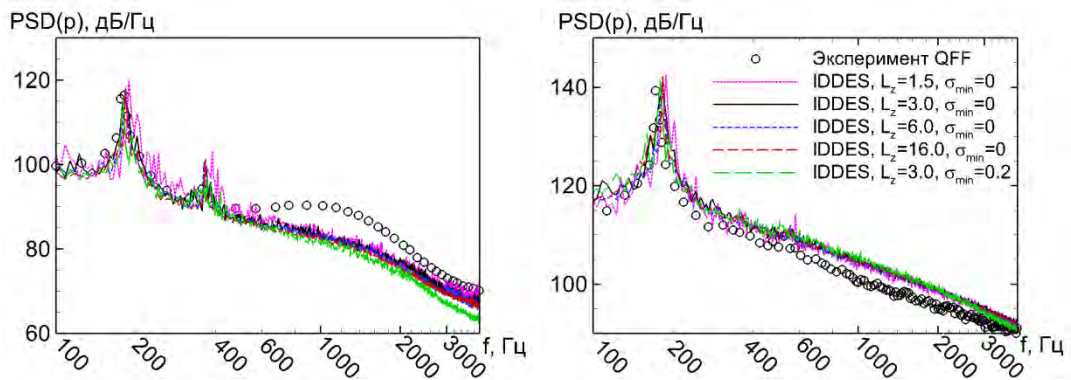


Рис. 116. Спектральная плотность мощности пульсаций давления на поверхности переднего цилиндра при $\theta = 135^\circ$ (слева) и на поверхности заднего цилиндра при $\theta = 45^\circ$ (справа).

Таким образом, на основе анализа параметров осредненного течения и характеристик турбулентности можно заключить, что для их достаточно точного определения необходимо использовать расчетные области с $L_z/D \geq 3$ и схемы с низким уровнем численной диссипации.

Как уже отмечалось, расчеты шума в дальнем поле были выполнены с использованием метода FWH. При этом, с учетом малости числа Маха, предполагалось, что вкладом объемных источников шума («квадруполей») можно пренебречь, что позволяет использовать в качестве контрольной FWH поверхности поверхность цилиндров [307]. На Рис. 118 показана схема расположения микрофонов, с помощью которых измерялся шум в эксперименте (координаты микрофонов приведены в Табл. 2). Как следует из таблицы, расстояния от тандема до микрофонов составляют от $18.6D$ до $29D$, что не вполне оправдывает приближение “дальнего” поля, используемое в расчете. Это обстоятельство следует иметь в виду при сравнении расчетных и экспериментальных данных.



Рис. 118. Схема расположения микрофонов в экспериментах QFF.

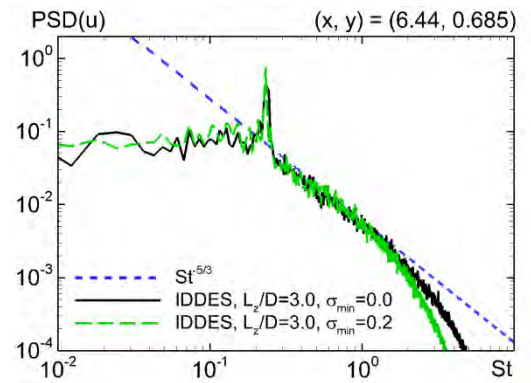


Рис. 117. Спектральная плотность мощности пульсаций продольной скорости в точке, расположенной в следе заднего цилиндра в точке $(x/D, y/D) = (6.44, 0.685)$.

Табл. 2. Координаты микрофонов в экспериментах QFF.

| N | θ° | x/D | y/D | Расстояние до ближайшего цилиндра |
|-----|----------------|-------|-------|-----------------------------------|
| M1 | 59.37 | -9.75 | 16.46 | 18.63 |
| M2 | 78.47 | -4.22 | 20.69 | 20.62 |
| M3 | 95.40 | 2.21 | 23.36 | 22.91 |
| M4 | 110.6 | 9.11 | 24.27 | 24.37 |
| M5 | 124.4 | 16.01 | 23.36 | 25.91 |
| M6 | 137.3 | 22.44 | 20.69 | 27.42 |
| M7 | 149.5 | 27.97 | 16.46 | 28.83 |

Анализ полученных спектров (их пример в точке, соответствующей положению микрофона M3 приведен на Рис. 120) свидетельствует о том, что, как и следовало ожидать, повышение степени диссипативности численной схемы (увеличение параметра σ_{\min}) приводит к понижению высокочастотной части спектра. Увеличение размера расчетной области L_z приводит к сдвигу расчетных спектров вверх во всем диапазоне частот. Эта же тенденция наблюдается и в расчетных зависимостях интегрального шума от положения микрофона (Рис. 119). При этом наилучшее

согласование с результатами измерений, естественно, достигается при значении этого параметра, равном реальной длине цилиндров в экспериментах на установке QFF, где производились измерения шума в дальнем поле ($L_z/D = 16$).

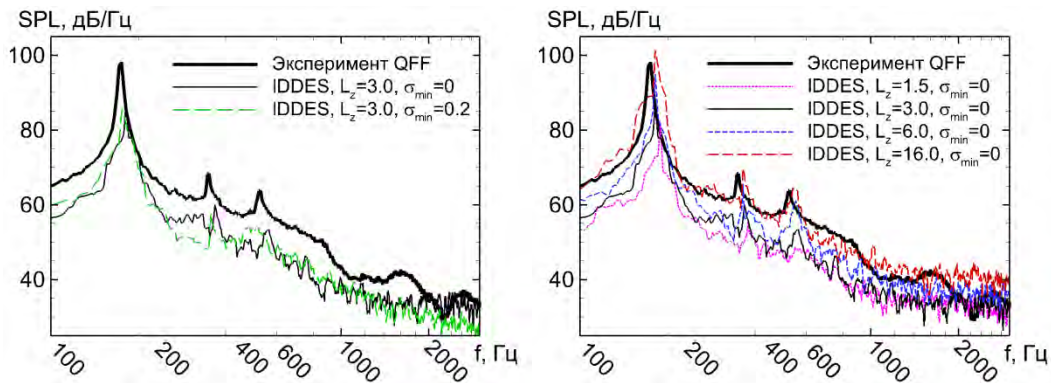


Рис. 120. Сравнение расчетных и экспериментальных спектров шума в точке расположения микрофона МЗ.

Таким образом, в отличие от расчета аэродинамических характеристик течения, которые достаточно точно предсказываются уже при $L_z/D = 3$, для предсказания шума необходимо использовать расчетную область, размер которой в поперечном направлении совпадает с размером экспериментальной модели. В большинстве случаев это требует использования очень больших вычислительных ресурсов и оказывается практически невозможным. Поэтому для расчета шума, создаваемого при обтекании «квазидвумерных» тел, предложен ряд специальных поправок (см., например, [308], [309]), учитывающих разницу в поперечном размере между расчетной областью и реальным объектом. Простейшая из них (поправка П1) базируется на предположении о том, что акустические сигналы от отдельных отрезков тела длиной L_z , на которые может быть условно разбито реальное тело, являются некоррелированными между собой. В этом случае суммарная спектральная мощность шума равна сумме спектральных мощностей от отдельных источников длиной L_z , то есть искомая поправка определяется соотношением

$$\Delta(dB) = 10 \lg(N), \quad (4.1)$$

где $\Delta(dB)$ - величина поправки в децибелах, $N = L_{exp}/L_z$, а L_{exp} - размер тела в эксперименте.

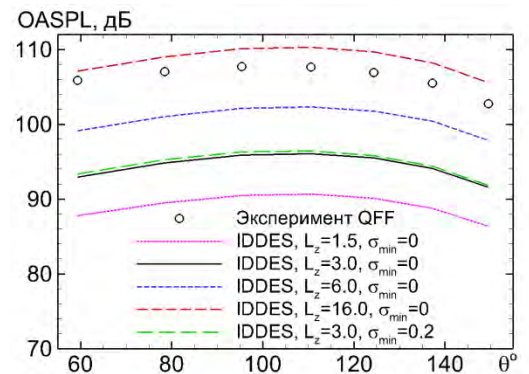


Рис. 119. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей интегрального шума от положения микрофона.

Однако данное предположение является весьма грубым и может приводить к существенному занижению шума. В связи с этим в настоящей работе использовалась более точная поправка П2, предложенная в [309] и определяемая по формулам:

$$\begin{cases} \Delta(\text{дБ}) = 10\lg(N) & \text{при } L_{\text{coh}} / L_z \leq \pi^{-1/2} \\ \Delta(\text{дБ}) = 10\lg(L_{\text{coh}} / L_z) + 10\lg(\pi^{1/2} N) & \text{при } \pi^{-1/2} < L_{\text{coh}} / L_z < N\pi^{-1/2}, \\ \Delta(\text{дБ}) = 20\lg(N) & \text{при } L_{\text{coh}} / L_z \geq N\pi^{-1/2} \end{cases}, \quad (4.2)$$

где $L_{\text{coh}} = L_{\text{coh}}(f)$ - зависящая от частоты длина когерентности в направлении z , оценка которой может быть получена по известному из расчета нестационарному полю давления на обтекаемой поверхности. Эта оценка основывается на анализе так называемой карты когерентности, пример которой представлен на Рис. 121. На нем построены изолинии величины когерентности $\gamma(f, \Delta z)$ [309] двух нестационарных сигналов давления в точках с координатами z и $z + \Delta z$ на образующей заднего цилиндра при $\theta = 135^\circ$. При этом длина когерентности L_{coh} соответствует значению $\Delta z/D$, при котором величина когерентности равна $e^{-1} \approx 0.37$ [309] (соответствующая изолиния аппроксимировалась ломаной линией, показанной на рисунке).

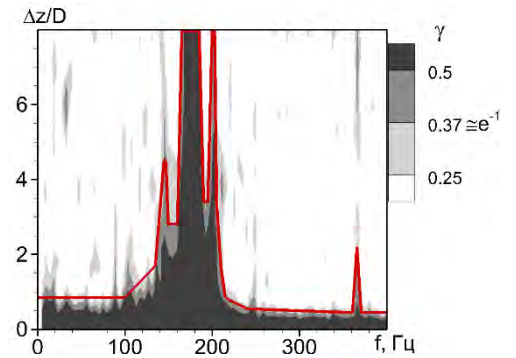


Рис. 121. “Карта” когерентности в плоскости $(\Delta z, f)$ на образующей заднего цилиндра при $\theta = 135^\circ$, полученная из IDDES расчета при $L_z/D = 16$.

На Рис. 122 и Рис. 123 представлены расчетные спектры шума и зависимость интегрального шума от положения микрофона, полученные с использованием поправок П1 и П2. Скорректированный с помощью П2 спектр из IDDES расчета при $L_z/D = 3$ и $\sigma_{\min} = 0.0$ хорошо согласуется с не нуждающимся в коррекции спектром из аналогичного расчета при $L_z/D = 16$ и с экспериментальным спектром в диапазоне частот от ~ 100 до ~ 1800 Гц, содержащем основную частоту глобальных колебаний следа и ее субгармоники. Вследствие этого соответствующие результаты расчета интегрального шума (Рис. 123) также согласуются с экспериментом вполне удовлетворительно (для всех рассмотренных положений микрофона погрешность не превышает 2 дБ). В случае же использования упрощенной поправки П1 погрешность в определении интегрального шума на основе IDDES при $L_z/D = 3$ оказывается более существенной и достигает 6 дБ и 7 дБ по отношению к эксперименту и расчету при $L_z/D = 16$ соответственно. Это обусловлено сильным занижением рассчитанного с помощью П1 шума в окрестности спектрального максимума, соответствующего основной частоте колебаний следа (Рис. 122), что связано с тем, что в этой области частот длина когерентности пульсаций давления на поверхности цилиндра существенно превышает поперечный размер расчетной области $L_z/D = 3$ (Рис. 121).

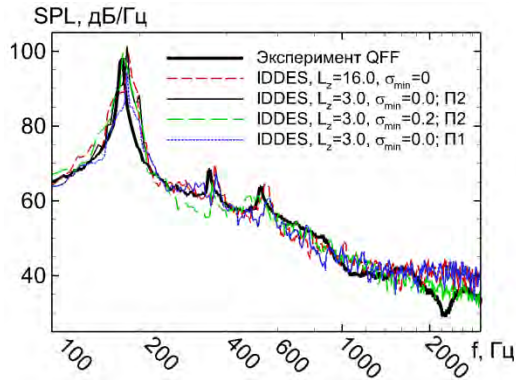


Рис. 122. Сравнение спектров шумов точки М3, полученных при $L_z/D = 3$ с использованием поправок П1 и П2, с экспериментом и результатами расчета при $L_z/D = 16$.

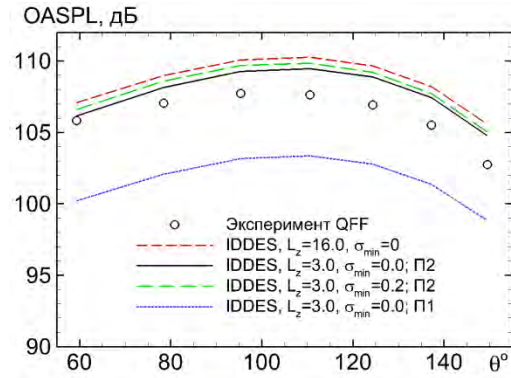


Рис. 123. Сравнение интегрального шума от положения микрофона, полученного при $L_z/D = 3$ с использованием поправок П1 и П2, с экспериментом и результатами расчета при $L_z/D = 16$.

Увеличение параметра σ_{\min} до 0.2 приводит некоторому улучшению согласования расчетного спектра с экспериментом в области высоких частот (Рис. 122). Аналогичный эффект (улучшение согласования результатов расчетов шума с экспериментом с ростом σ_{\min} до 0.2) наблюдался в работе [310], посвященной расчету модели шасси самолета и других более простых конфигураций. Одной из возможных причин этого эффекта может быть искажение высокочастотного шума при использовании низко-диссипативных схем вследствие присущих им численных осцилляций решения.

Подводя итоги, можно заключить, что IDDES обеспечивает не только качественно правильное описание турбулентной структуры рассматриваемого течения, но хорошее количественное согласование полученных с его помощью результатов с экспериментальными данными. Что касается влияния ширины расчетной области, то при расчете аэродинамических характеристик потока вполне удовлетворительные результаты получены уже при $L_z/D \geq 3$, однако при расчете шума необходимо использование специальных поправок на ширину расчетной области, учитывающих когерентность источника или проводить расчеты в области с размерами равными размеру реального объекта.

4.2. ОБТЕКАНИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОГО ПРОФИЛЯ DLR-F15.

Задача обтекания трехэлементного профиля имеет важное практическое значение, поскольку именно такая конфигурация крыла обеспечивает повышенное значение коэффициента подъемной силы (в англоязычной литературе она носит название *high-lift configuration*), необходимое при взлете и посадке пассажирских самолетов. Это течение характеризуется несколькими отрывными зонами, две из которых (в углублениях предкрылка и основного крыла) обусловлены геометрическими особенностями трехэлементного профиля, а отрыв от верхней поверхности за-

крылка вызывается неблагоприятным градиентом давления (Рис. 124). Несмотря на то, что решение уравнений Рейнольдса с использованием некоторых моделей турбулентности обеспечивает достаточно высокую точность предсказания средних аэродинамических характеристик обтекания трехэлементных профилей, исследование возможностей вихреразрешающих подходов применительно к этому течению имеет важное самостоятельное значение, так как с использованием таких методов можно предсказать не только аэродинамические, но и акустические характеристики потока.

Постановка задачи

Для тестирования разработанного SST IDDES подхода был выбран крыловой профиль DLR-F15 [311], обтекание которого было детально изучено в рамках проекта LEISA (Low noise exposing integrated design for start and approach), выполненного в DLR, и европейского проекта АТААС [11]. Положения закрылка и предкрылка, использовавшиеся в настоящей работе (Рис. 124), были подобраны в ходе проекта LEISA, поэтому данная конфигурация часто носит название F15 3eOpt или LEISA.

Характерными масштабами задачи являются скорость набегающего потока U_∞ и длина хорды профиля в «сложенном» состоянии c (когда предкрылок и закрылок плотно прилегают к основному профилю). Числа Маха и Рейнольдса, построенные по этим параметрам, составляют, соответственно, $M_\infty = 0.15$ and $Re = 2.094 \cdot 10^6$, а величина угла атаки равна $\alpha = 6^\circ$.

Внешние границы области в плоскости XY , в которой проводились расчеты, отстояли от профиля не менее чем на $100c$. В поперечном сечении размер области был примерно равен ширине следа за профилем и составлял $L_z/c = 8\%$.

На входных и выходных внешних границах использовались характеристические граничные условия [303], сформулированные относительно инвариантов Римана, на твердых стенках – условия прилипания и нулевого теплового потока, а в поперечном направлении течение полагалось периодическим.

Блочко-структурированная сетка в плоскости XY (Рис. 125) была построена таким образом, чтобы обеспечить разрешение вышеописанных

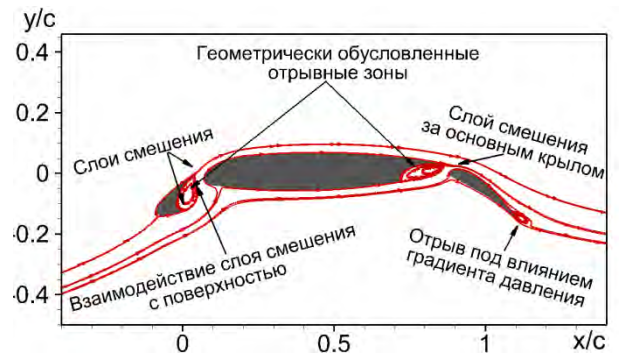


Рис. 124. Геометрия трехэлементного профиля DLR-F15 и основные особенности течения.

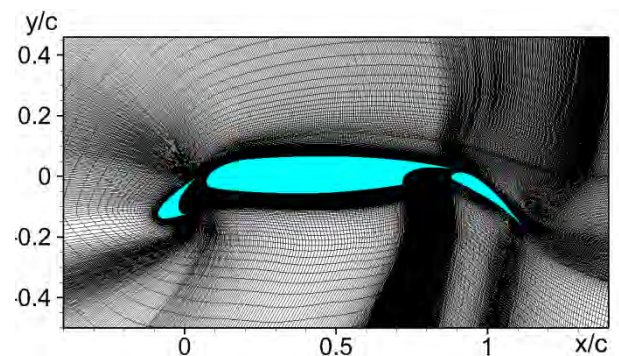


Рис. 125. Расчетная сетка в окрестности профиля DLR-F15.

особенностей течения. Шаги сетки были сгущены в слоях смешения и зонах рециркуляции, а также около стенок для обеспечения выполнения условия $\Delta y_1^+ < 1$. Сетка в направлении оси z являлась равномерной, а количество узлов в этом направлении было равно 100 ($\Delta z/c = 8 \cdot 10^{-4}$). В пограничных слоях шаги сетки удовлетворяла критериям, предъявляемым к сеткам для WMLES [173]. Общий размер сетки превысил 27 миллионов точек.

При проведении расчетов безразмерный шаг по времени был равен $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} c/U_\infty$. Время установления составило около $4c/U_\infty$, а осреднение проводилось как по времени ($T = 2c/U_\infty$), так и по однородному направлению z .

Результаты расчетов

Визуализация течения из SST IDDES расчета описанного выше течения, представленная на Рис. 126, свидетельствует о том, что метод функционирует в соответствии с его дизайном. Так, в присоединенных пограничных слоях на сторонах давления основного крыла и закрылка, а также на стороне разряжения предкрылка, он работает в режиме RANS, в отрывных зонах в углублениях предкрылка и основного крыла - в режиме LES и в присоединенных пограничных слоях, расположенных на верхней поверхности основного профиля и закрылка, - в режиме WMLES.

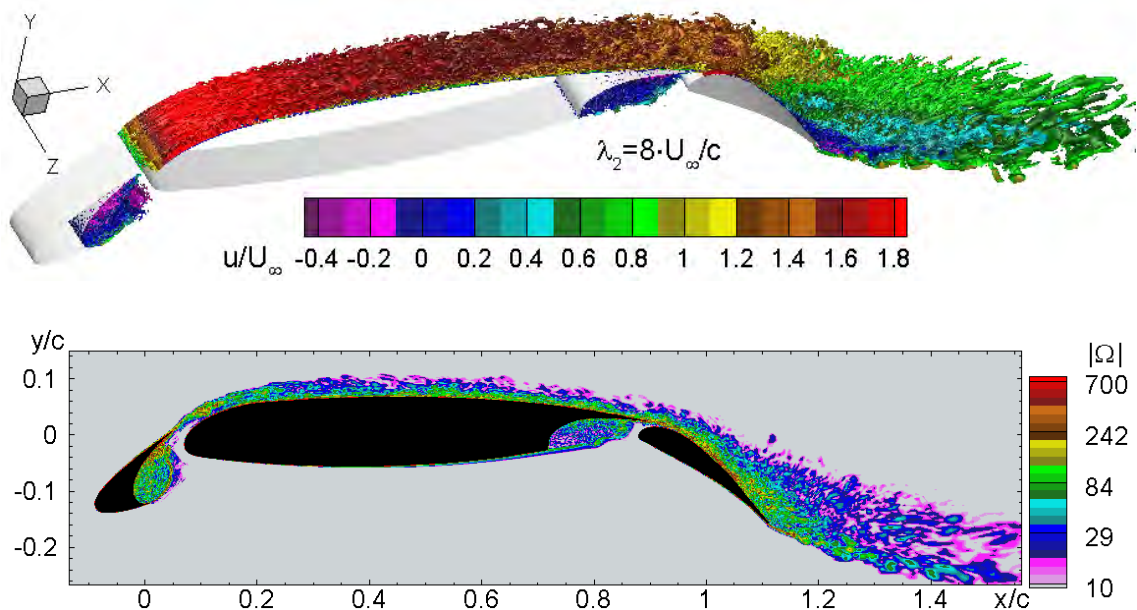


Рис. 126. Мгновенная изоповерхность величины закрутки λ_2 и мгновенное поле модуля завихренности в плоскости XY из SST IDDES расчета.

Как уже отмечалось, в данном течении имеется несколько слоев смешения, возникающих при отрыве потока от предкрылка и основного профиля. Задержка развития турбулентности в этих слоях смешения, в принципе, может приводить к снижению точности расчета в целом. Поэтому наряду с расчетом с использованием стандартного метода SST IDDES, был выполнен расчет с помощью его версии, основанной на использовании подсеточного масштаба,

адаптированного к слоям смешения Δ_{SLA} (см. Раздел 3.1.2). Эффективность этой версии иллюстрируют соответствующие визуализации течения в слоях смешения, показанные на Рис. 127. Из них видно, что при ее использовании протяженность квазидвумерных участков слоев смешения заметно сокращается. Однако эти изменения практически не сказываются на распределениях коэффициентов давления и трения по поверхности профиля.

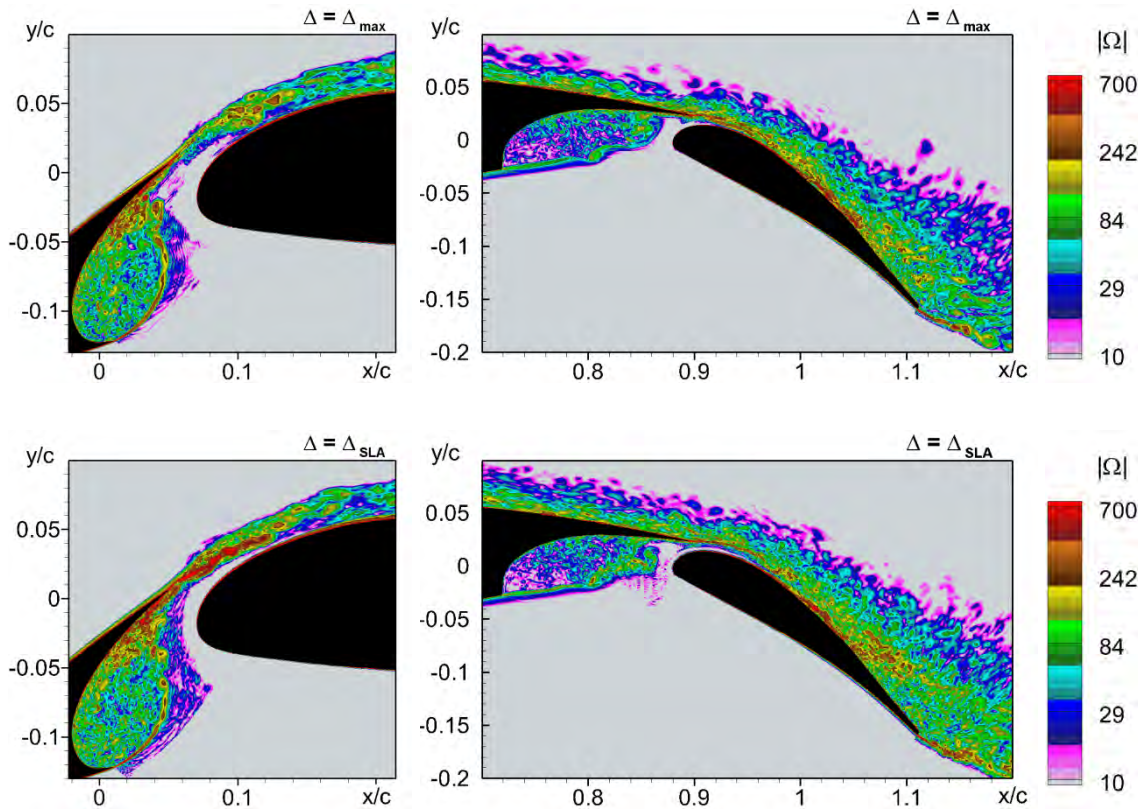


Рис. 127. Сравнение структуры турбулентности в отрывающихся от предкрылка и основного крыла слоях смешения, рассчитанной с помощью стандартного и модифицированного методов SST IDDES.

Сравнение результатов расчетов распределения давления и трения с экспериментальными данными (Рис. 128) свидетельствует о высокой точности решения, полученного методом IDDES в окрестности предкрылка и передней части профиля (в этой области метод IDDES существенно превосходит SST RANS). Таким образом, IDDES может быть успешно использован для расчета шума, источником которого является отрывная зона за предкрылком. Однако в области закрылка точность IDDES снижается. Наиболее вероятной причиной этого является отличие расчетного положения точки отрыва от верхней поверхности закрылка от экспериментального значения. В частности, более поздний отрыв, предсказываемый расчетом, приводит к занижению размера отрывной зоны и, как следствие, к повышению общего уровня давления в этой области.

В целом, результаты применения SST IDDES к расчету трехэлементного профиля можно оценить только как частично успешные.

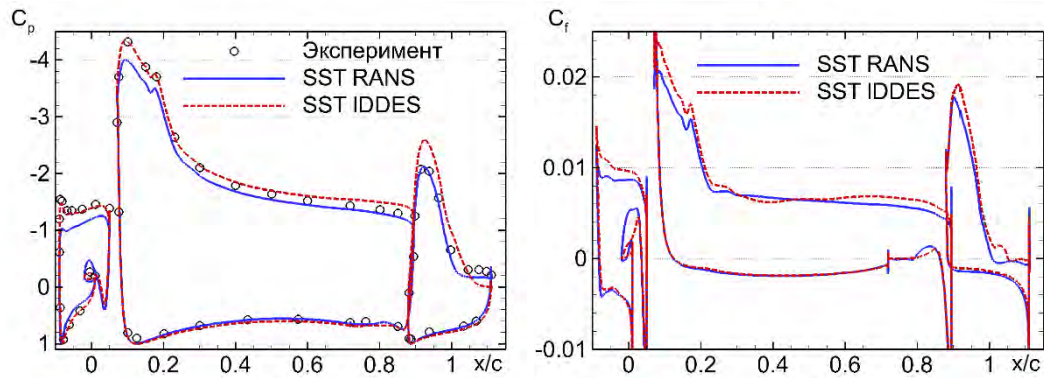


Рис. 128. Распределения коэффициентов давления и терния вдоль поверхности профиля.

4.3. РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ОБТЕКАНИИ МОДЕЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ КРЫЛО - ЗАКРЫЛОК

Расчет шума, возникающего при обтекании крыла с закрылком, является важной прикладной задачей, сложность решения которой связана с необходимостью учета различных источников шума в этом течении, а именно турбулентности в присоединенных пограничных слоях и в следе за основным профилем, шума, вызванного взаимодействием этого следа с закрылком, а также турбулентностью в следе закрылка.

Представленные ниже результаты были получены в соавторстве с К.В. Никифоровой [312].

Постановка задачи

Рассматривается обтекание модельной конфигурации (длинное симметричного крыло с острой задней кромкой), в следе которого расположен закрылок, имеющий форму крылового профиля NACA0012 (Рис. 129). Экспериментальное исследование этого течения [313] было выполнено в рамках европейского проекта VALIANT. Характерными масштабами течения являются скорость набегающего потока $U_\infty = 50$ м/с и длина хорды закрылка $c = 0.1$ м, а числа Рейнольдса и Маха, построенные по этим масштабам, равны $Re = 3.3 \cdot 10^5$ и $M_\infty = 0.15$, соответственно. Толщина пограничного слоя на основном крыле на расстоянии $2c$ вверх по потоку от задней кромки составляла в эксперименте $\delta_0/c = 6 \cdot 10^{-2}$.

Расчеты проводились в прямоугольной расчетной области размером $11c \times 12c \times 0.18c$, ширина которой в трансверсальном направлении составляла $1/17$ от соответствующего размера экспериментальной модели.

На входной границе расчетной области задавались профили скорости и турбулентных характеристик, полученные из предварительного расчета пограничного слоя на плоской пластине в сечении, где толщина пограничного слоя равна экспериментальному значению. Давление на входной границе определялось путем линейной экстраполяции изнутри области. На выходной

границе задавалось постоянное давление, а остальные переменные экстраполировались изнутри области. На твердых стенках использовались условия прилипания и нулевого теплового потока, а в трансверсальном направлении – условия периодичности.

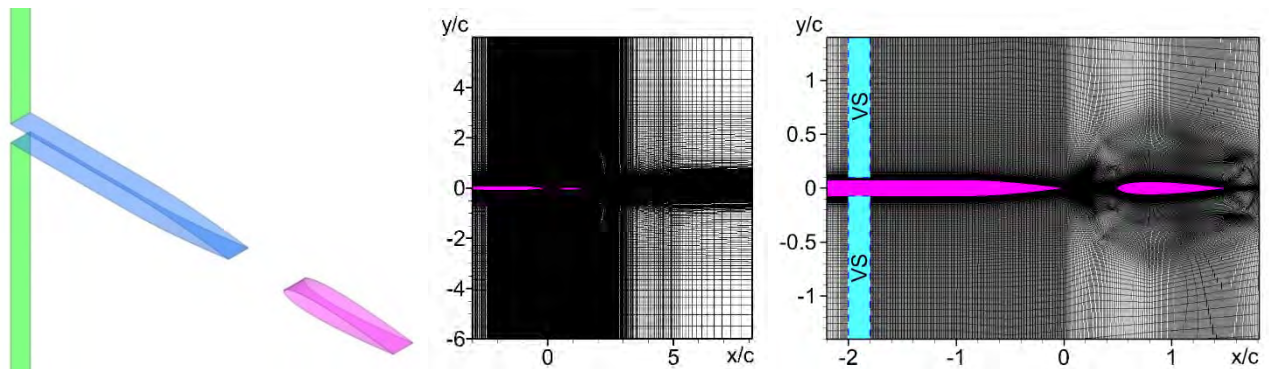


Рис. 129. Модельная конфигурация крыло-закрылок, расчетная область и расчетная сетка.

Для того, чтобы избежать отражения акустических волн от внешних границ, в их окрестности были размещены поглощающие слои [304] размером в несколько ячеек. Внутри этих слоев на каждом шаге интегрирования по времени полученное поле плотности корректировалось путем взвешивания с постоянным значением, равным плотности во внешнем потоке, а весовая функция возрастала от нуля до единицы по мере приближения к границе.

Для решения описанной задачи использовался одностадийный гибридный подход, представленный в разделе 3.1.3. Длина области объемного источника VS составляла $L_{VS} = 3\delta_0$, а ее начало располагалось в сечении $x/c = -2$.

Расчетная сетка строилась в соответствии с требованиями, предъявляемыми к сеткам для WMLES [173]. В частности, первый пристеночный шаг $\Delta y_1/c = 8 \cdot 10^{-5}$ обеспечивал выполнение условия $\Delta y_1^+ < 1.2$ во всех точках поверхности крыла и закрылка, а величины шагов в продольном и поперечном направлении составляли $\Delta x = 0.1\delta_0$ и $\Delta z = 0.05\delta_0$, соответственно. Общий размер сетки составил примерно 12 миллионов ячеек.

Безразмерный шаг интегрирования по времени был равен $\Delta t U_\infty/c = 6 \cdot 10^{-4}$, что обеспечивало выполнение условия $CFL < 1$ во всей расчетной области. Расчет проводился в течение 75 конвективных времен c/U_∞ , 25 из которых (два времени проноса через расчетную область) требовалось для выхода на статистически установившийся режим, а остальные 50 (четыре времени проноса) использовались для сбора статистической информации необходимой для расчета осредненных и спектральных аэроакустических характеристик.

Расчеты были выполнены с помощью кода ANSYS FLUENT; полученные при этом результаты сравнивались с экспериментальными данными [313] и с результатами расчета, выполненными с использованием NTS кода в рамках проекта VALIANT [314].

Результаты расчетов

Представленные на Рис. 130 мгновенные поля модуля завихренности и изоповерхности Q-критерия из полученного решения демонстрируют быстрое формирование разрешенных турбулентных структур в присоединенном пограничном слое на основном профиле, а также наглядно иллюстрируют их дальнейшую эволюцию. Кроме того, визуализация картины звуковых волн (Рис. 131) свидетельствует о том, что использование VS не приводит к генерации ложного шума. Все это подтверждает эффективность метода объемного генератора турбулентности при решении задач аэроакустики.

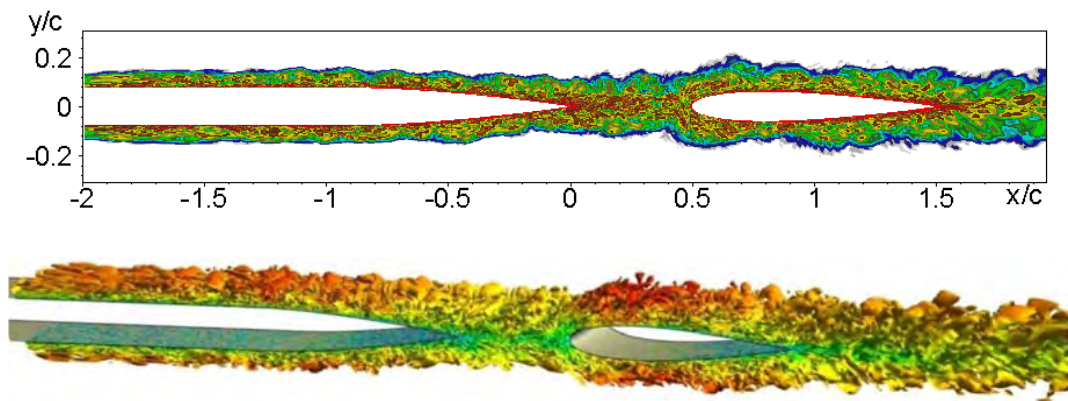


Рис. 130. Мгновенные контуры завихренности и Q-критерия.

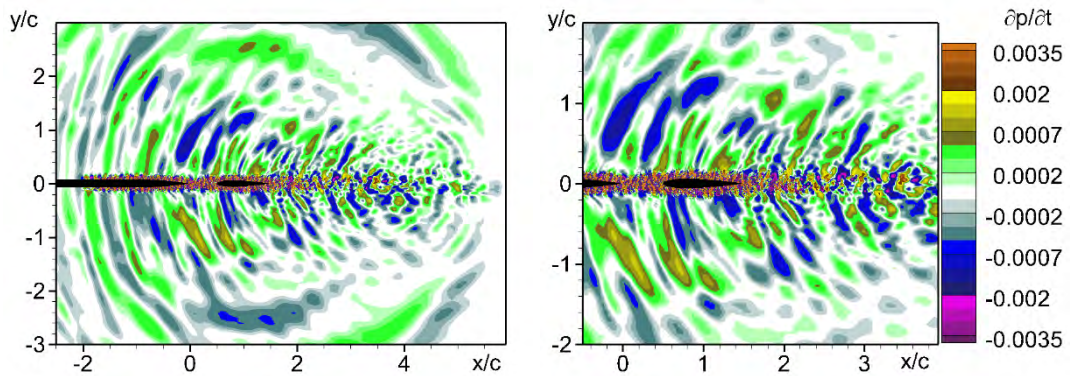


Рис. 131. Мгновенные поля производной давления от времени в акустическом диапазоне.

Сравнение расчетной спектральной плотности мощности пульсаций давления в некоторых точках на поверхности основного крыла и закрылка с экспериментальными данными и с результатами, полученными с использованием NTS кода, приведено на Рис. 132. Из него видно, что результаты обоих расчетов хорошо согласуются друг с другом и с экспериментальными данными как по уровням, так и по форме спектральных кривых (некоторое занижение спектров на основном крыле в области высоких частот $f > 10$ кГц по сравнению с результатами NTS кода связано с использованием в ANSYS FLUENT несколько более диссипативной схемы).

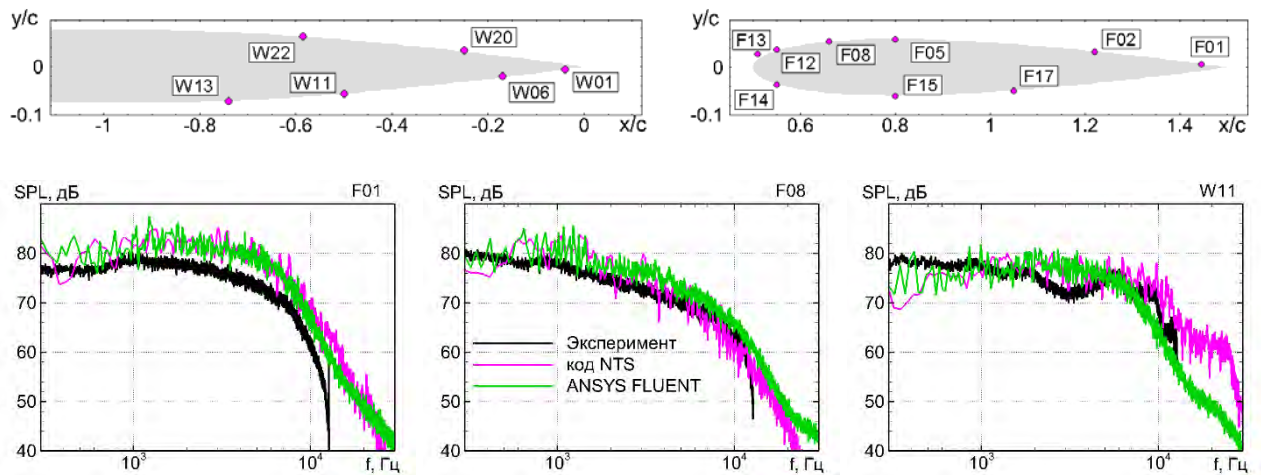


Рис. 132. Спектральная плотность мощности пульсаций давления в различных точках на поверхности крыла и закрылка.

Расчет шума в дальнем поле производился с помощью метода Фокса-Вильямса-Хокинга (*Ffowcs Williams, Hawkins – FWH*) [305] на основе нестационарных данных, сохраняемых в процессе расчета на так называемых контрольных поверхностях FWH. При этом использовались два типа контрольных поверхностей (Рис. 133): твердая s_0 , включающая в себя все твердые поверхности при $x > x_{inflow}$, и проницаемая s_1 , включающая сечения $x = x_{inflow}$ и $x = x_{outflow}$, а также сеточную поверхность между ними. Расчеты с использованием непроницаемых поверхностей являются, вообще говоря, менее точными, поскольку они не учитывают квадрупольных источников шума. Однако, при использовании проницаемых поверхностей их «замыкающие поверхности» (красные линии на Рис. 133) не удовлетворяют критериям, предъявляемым к FWH поверхностям, поскольку содержат участки турбулентного течения. В этой связи расчеты с проницаемой FWH поверхностью проводились как с включением отрезков $x = x_{inflow}$ и $x = x_{outflow}$ (замкнутая поверхность), так и без их учета (открытая поверхность).

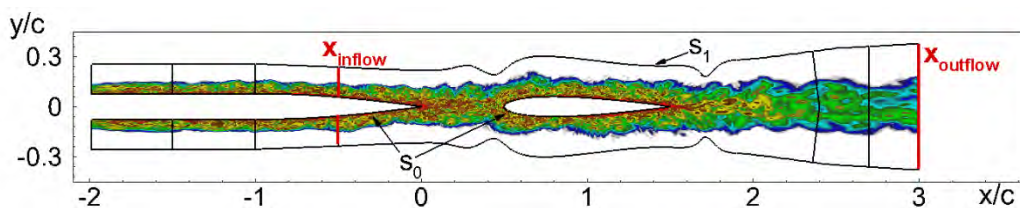


Рис. 133. Контрольные FWH поверхности, использовавшиеся для расчета шума в дальнем поле.

При сравнении результатов расчета шума в дальнем поле с экспериментальными данными необходимо учитывать, что, как отмечалось выше, размер расчетной области по координате z в 17 раз меньше, чем реальный «размах крыла» в экспериментальной установке. Для приведения полученных результатов к условиям эксперимента использовалась соответствующая поправка (4.1) [308], базирующаяся на предположении о том, что длина корреляции по z в эксперименте меньше размера расчетной области по z .

На Рис. 134 - Рис. 136 приведено сравнение с экспериментом расчетных спектров шума, распространяющегося перпендикулярно направлению течения, в дальнем поле. Из Рис. 134 видно, что спектры, полученные в данной работе с помощью ANSYS FLUENT с использованием непроницаемых FWH поверхностей, хорошо согласуются с аналогичными спектрами, полученными в [314] с помощью кода NTS, и с данными эксперимента в диапазоне $700 \text{ Гц} < f < 10 \text{ кГц}$. Заметное различие расчетных спектров в области более высоких частот связано с уже отмененной при анализе спектров пульсаций давления на твердых поверхностях (Рис. 132) более высокой диссипативностью схемы, используемой в ANSYS FLUENT. Это различие практически исчезает при использовании закрытой проницаемой FWH поверхности, позволяющей учесть квадрупольные источники шума внутри этой поверхности (Рис. 135).

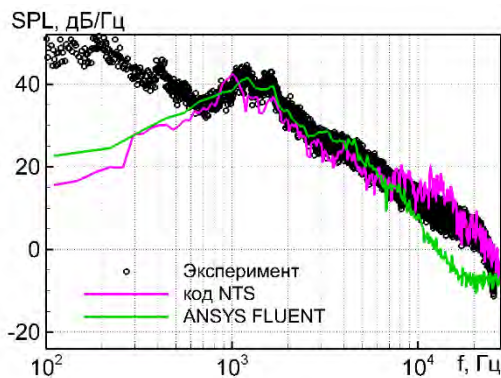


Рис. 134. Спектры шума в дальнем поле, рассчитанные с использованием непроницаемых FWH поверхностей s_0 .

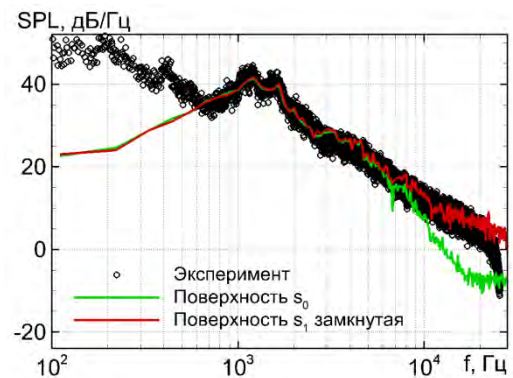


Рис. 135. Сравнение спектров шума в дальнем поле, полученных с использованием непроницаемых и проницаемых FWH поверхностей с помощью ANSYS FLUENT.

Наконец, анализ влияния «закрывающих отрезков» x_{inflow} и $x_{outflow}$, представленный на Рис. 136, свидетельствует о слабой чувствительности результатов расчетов к их включению в проницаемую FWH поверхность. В целом, независимо от наличия или отсутствия «закрывающих поверхностей», использование проницаемой поверхности является предпочтительным, поскольку дает существенно более точные результаты на высоких частотах.

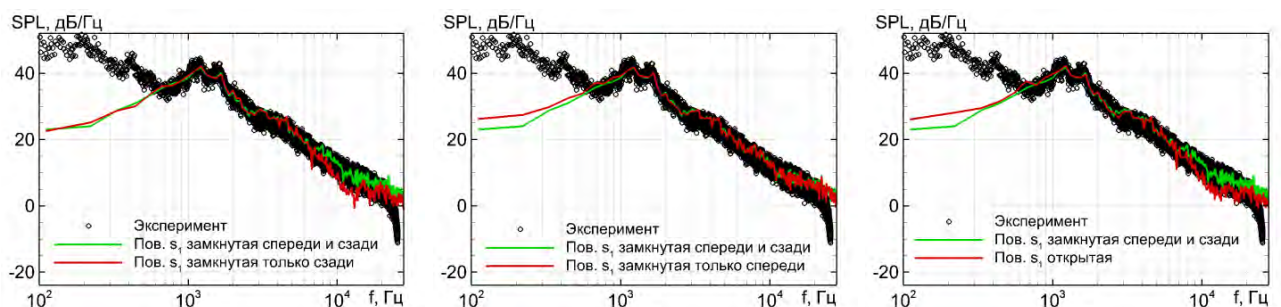


Рис. 136. Влияние включения сечений x_{inflow} и $x_{outflow}$ в общую FWH поверхность.

Что касается отличия результатов обоих расчетов (в рамках ANSYS FLUENT и NTS кода) от экспериментальных данных при $f < 700$ Гц, то его причина связана с наличием фонового шума аэродинамической трубы.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют не только о работоспособности, но и о достаточно высокой точности разработанного одностадийного гибридного RANS-LES подхода с использованием объемного источника турбулентности при решении задач аэроакустики.

4.4. РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ЭЛЕМЕНТЫ ПИЛОТИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОРАБЛЕЙ

В данном разделе представлены результаты численных исследований обтекания элементов пилотируемых космических кораблей (ПКК) при полете в плотных слоях атмосферы¹⁵, выполненных с использованием гибридных RANS-LES моделей в процессе работы над диссертацией. Эти исследования включают решение трех задач, непосредственно связанных с обеспечением безопасности экипажа на стадии возвращения на Землю обитаемого модуля (возвращаемого аппарата - ВА) и на начальном этапе полета корабля. Первая из этих задач состоит в расчете обтекания ВА, а вторая и третья - в расчете обтекания его космической головной части (КГЧ), которая включает ПКК и систему аварийного спасения экипажа (САС), и в расчете процесса разведения отделяемого головного блока (ОГБ) и ракеты носителя (РН) при срабатывании ракетного блока аварийного спасения (РБАС).

4.4.1 ТРАНСЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ВОЗВРАЩАЕМОГО АППАРАТА

При входе в плотные слои атмосферы ВА подвергается огромным динамическим и тепловым нагрузкам, знание которых необходимо для создания надежных (гарантирующих безопасность экипажа) конструкций ВА. В связи с этим расчетному исследованию их обтекания посвящено огромное число работ. Однако основное внимание в большинстве из них уделялось моделированию физико-химических процессов взаимодействия высокотемпературного гиперзвукового потока газа и плазмы с обтекаемой поверхностью в рамках уравнений Рейнольдса для многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей (результаты этих исследований можно найти, например, в монографиях [319] - [322] и множестве других работ, посвященных этой тематике). Эти исследования позволили решить проблему тепловой защиты аппарата при

¹⁵ Подробный анализ аэродинамических задач, возникающих при проектировании космических кораблей, подходов, используемых для их решения, и результатов расчетов можно найти в многочисленных обзорах по этой тематике (см., например, [315] - [318]).

его входе в плотные слои атмосферы при высоких (гиперзвуковых) скоростях полета. Что касается расчетных исследований, направленных на определение силовых нагрузок на поверхность ВА на этапах полета с относительно небольшими числами Маха ($M < 6$), то вплоть до недавнего времени они были ограничены рамками стационарных уравнений Рейнольдса (см, например, [323] - [329]). Это исключало возможность определения уровня нестационарных динамических и акустических нагрузок на ВА, которые определяют “живучесть” ВА на данном этапе приземления и могут быть определены с приемлемой точностью только в рамках вихререзающих подходов к моделированию турбулентности (примеры таких исследований можно найти в [330], [331]). В настоящем разделе представлены результаты расчетов обтекания ВА, выполненные методом SA DDES и опубликованные в соавторстве с Д.А. Никулиным, М.Х. Стрельцом, А.А. Дядькиным, А.Н. Крыловым и К.А. Стекениусом [332].

Постановка задачи

Рассматривается обтекание одной из конструкций ВА (проекта «Федерация»¹⁶), использующего для управления спуском балансировочные щитки (Рис. 137), позволяющие сместить центр масс аппарата и за счет этого изменить его положение относительно набегающего потока.

Расчеты проводились при числах Маха и Рейнольдса, равных $M_\infty = 0.8$ и $Re = \rho U_\infty D / \mu = 1.42 \cdot 10^7$ (U_∞ - скорость набегающего потока, D - диаметр миделя ВА). Предполагалось, что при столь высоком числе Рейнольдса переход к турбулентности происходит достаточно быстро, поэтому расчеты проводились в полностью турбулентной постановке. Обтекание ВА рассматривалось при угле атаки набегающего потока $\alpha = 20^\circ$ и двух углах отклонения балансировочных щитков $\delta_{щ} = 10^\circ$ и $\delta_{щ} = 0$.

Расчетная область представляла собой шар диаметром $40 D$, в центре которого располагался ВА. На внешних границах области использовались характеристические граничные условия [303], сформулированные относительно инвариантов Римана, построенных по параметрам набегающего потока, а турбулентные характеристики обеспечивали развитое турбулентное течение в присоединенных пограничных слоях ($\mu_{тс}/\mu = 1$).

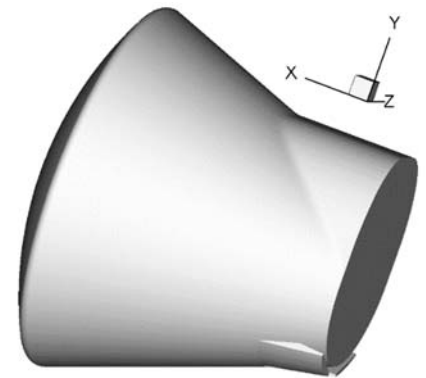


Рис. 137. Используемая расчетная модель возвращаемого аппарата с балансировочными щитками.

¹⁶ В настоящее время аппараты этого проекта носят название «Орел».

Расчетная сетка с перекрывающимися блоками типа «Химера» строилась следующим образом. Основной блок сетки «О»-типа покрывал большую часть расчетной области (красный блок на Рис. 138). Во избежание сингулярности в окрестности оси были построены два дополнительных блока (зеленый и синий блоки на Рис. 138). Наконец, при расчете варианта с отклоненными балансировочными щитками в основном блоке делался вырез, который заполнялся дополнительными блоками сетки (Рис. 139). При этом кроме блоков, непосредственно прилегающих к поверхности щитка (голубой и фиолетовый на Рис. 139), использовался дополнительный блок (черный), обеспечивающий согласование шагов сетки в области перекрытия блоков. Общий размер сетки составил около 5 миллионов узлов.

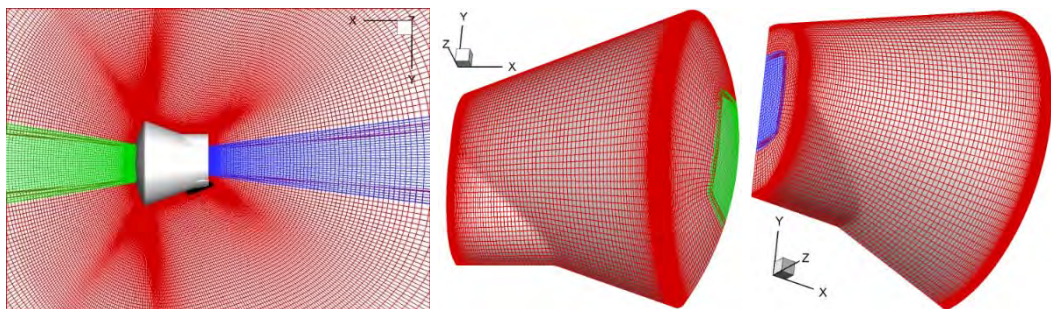


Рис. 138. Расчетная сетка в плоскости симметрии и на поверхности ВА.

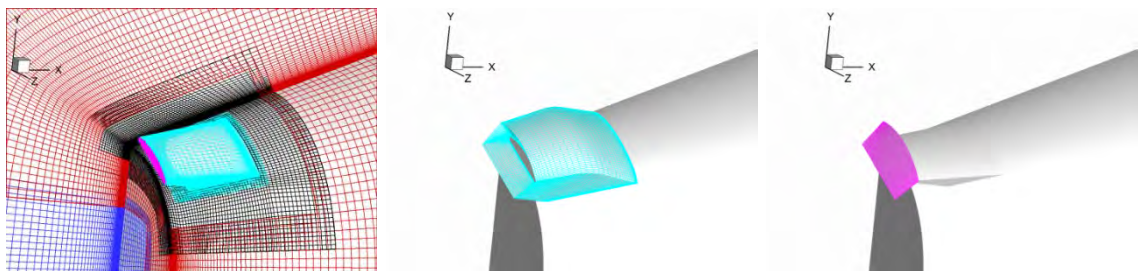


Рис. 139. Дополнительные блоки расчетной сетки в окрестности балансировочного щитка.

Результаты расчетов

Визуализация результатов расчета обтекания ВА с отклоненными щитками, показанная на Рис. 140, свидетельствует о возникновении в следе ВА крупных когерентных вихревых структур, характерных для течений в следе за плохообтекаемыми телами. Именно эти структуры, содержащие в себе основную часть (до 80%) энергии турбулентности, определяют размер отрывной зоны и распределение давления по поверхности ВА. При расчете подобных течений в рамках уравнений Рейнольдса точность предсказания аэродинамических характеристик в определенной степени зависит от «удачи», т.е. от способности конкретной модели турбулентности предсказать характеристики конкретного течения, определяемые когерентными структурами.

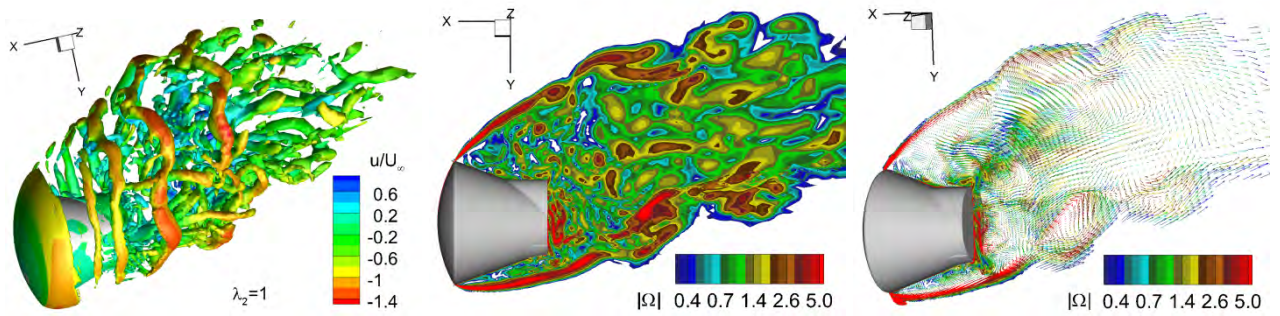


Рис. 140. Визуализация обтекания ВА, полученная методом DDES: закрутка (λ_2 -критерий), окрашенная величиной продольной компоненты скорости, поле модуля завихренности и векторное поле скорости в плоскости симметрии, окрашенное величиной завихренности.

Как уже было сказано, подавляющее большинство расчетов данного течения проводилось с использованием уравнений Рейнольдса, что связано с относительно небольшими вычислительными ресурсами, требуемыми для этого. В связи с этим крайне важной является оценка точности полуэмпирических моделей турбулентности при решении подобных задач. Для получения такой оценки в диссертации, наряду с DDES расчетами, были выполнены RANS расчеты с использованием лучших из существующих моделей, а именно модели Спаларта-Аллмараса [54] с поправкой на сжимаемость потока (SA CC) [53] и модели SST [56].

Сравнение результатов расчета основных газодинамических параметров осредненного течения, полученных с помощью RANS и DDES, представлено на Рис. 141. Из него видно, что эти результаты заметно отличаются друг от друга. В частности, DDES предсказывает существенно более равномерное распределение температуры в зоне рециркуляции и, что особенно важно, давления по донному срезу (см Рис. 142). Это объясняется интенсивным перемешиванием потока крупными вихревыми структурами, показанными на Рис. 140.

В результате интегральные аэродинамические характеристики течения, рассчитанные с помощью RANS и DDES, также заметно отличаются друг от друга (Табл. 3). Так, RANS успешно предсказывает коэффициент сопротивления C_x , однако ошибка в определении коэффициента подъемной силы C_y (и, следовательно, аэродинамического качества $K = C_y/C_x$) составляет при этом около 20%. Значительной является также погрешность RANS расчетов коэффициента крутящего момента M_z . Что касается влияния отклонения щитков на рассматриваемое течение, то оно оказывается незначительным независимо от используемого метода расчета турбулентности.

Таким образом, проведенные DDES расчеты позволили оценить погрешность метода RANS, традиционно используемого для предсказания характеристик трансзвукового обтекания ВА, и выявить основные его недостатки. Это предоставляет возможность внести соответствующие поправки в результаты RANS расчетов интегральных аэродинамических характеристик ВА, и, таким образом, повысить точность их предсказания.

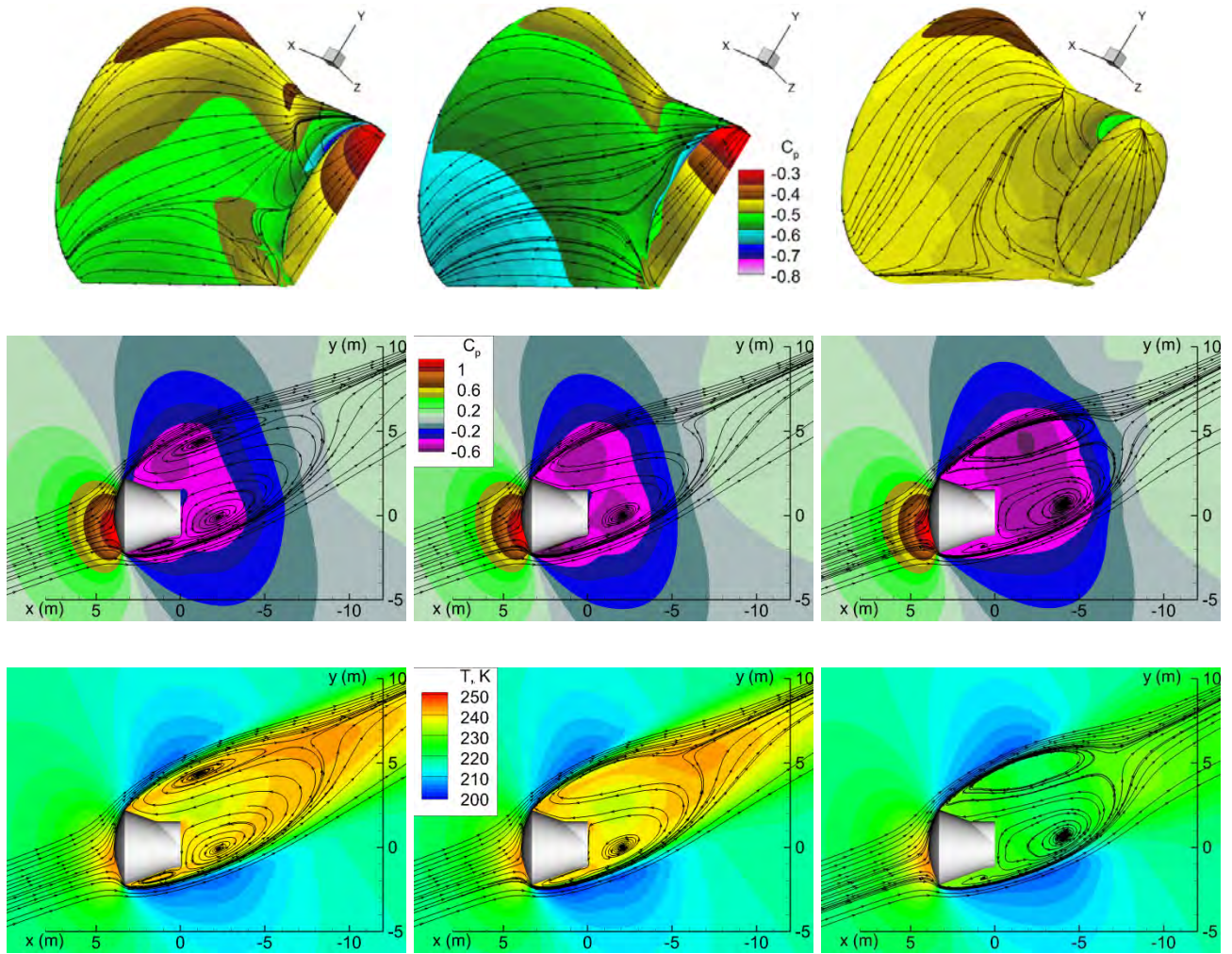


Рис. 141. Распределения коэффициента давления по поверхности ВА (верхний ряд) и в плоскости симметрии (средний ряд), а также температуры в плоскости симметрии (нижний ряд), рассчитанные различными методами: SACC RANS (левая колонка), SST RANS (средняя колонка), и SA DDES (правая колонка).

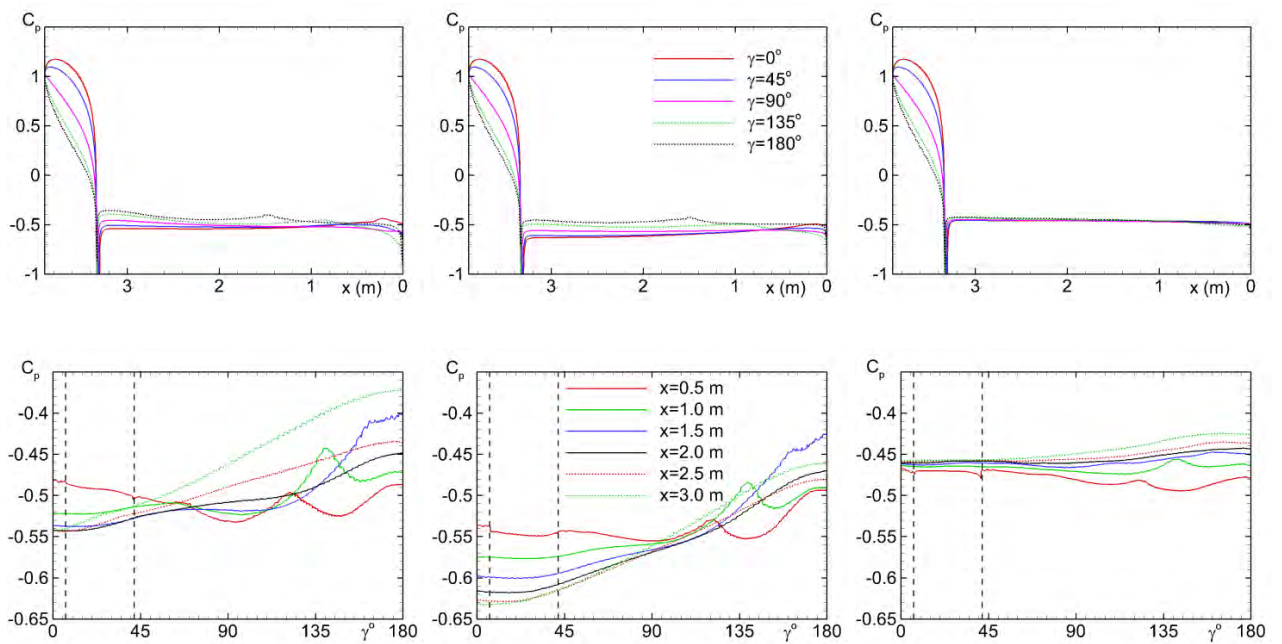


Рис. 142. Эпюры коэффициента давления на поверхности ВА, полученные методом SACC RANS (левая колонка), SST RANS (центральная колонка) и SA DDES (правая колонка).

Табл. 3. Влияние модели турбулентности и угла отклонения щитков на коэффициенты силы и момента.

| Модель турбулентности | Угол отклонения щитков $\delta_{щ}$ | C_x | C_y | C_z | $K = C_y/C_x$ | M_x | M_y | M_z |
|-----------------------|-------------------------------------|--------|--------|--------|---------------|---------|--------|--------|
| SACC RANS | 0 | 1,0077 | -0,351 | 0 | -0,348 | 0 | 0 | -0,016 |
| SACC RANS | 10° | 1,0082 | -0,351 | 0 | -0,349 | 0 | 0 | -0,015 |
| SST RANS | 0 | 0,9941 | -0,361 | 0 | -0,363 | 0 | 0 | -0,013 |
| SST RANS | 10° | 1,0394 | -0,383 | 0 | -0,369 | 0 | 0 | -0,014 |
| SA DDES | 0 | 0,9999 | -0,310 | -0,006 | -0,310 | -0,0005 | -0,004 | 0,000 |
| SA DDES | 10° | 1,0117 | -0,309 | -0,006 | -0,306 | -0,0005 | -0,004 | -0,002 |

Другим многократно отмечавшимся выше важным преимуществом DDES перед RANS является то, что наряду с осредненными параметрами потока этот подход позволяет рассчитать его нестационарные (связанные с турбулентными пульсациями) характеристики и, следовательно, определить динамические нагрузки на ВА. В качестве иллюстрации такой возможности на Рис. 143 представлены зависимости от времени коэффициентов аэродинамических сил действующих на ВА. Видно, что амплитуды этих колебаний достаточно велики (для силы сопротивления амплитуда колебаний составляет около 6% от среднего значения, а для момента M_z достигает ~100%).

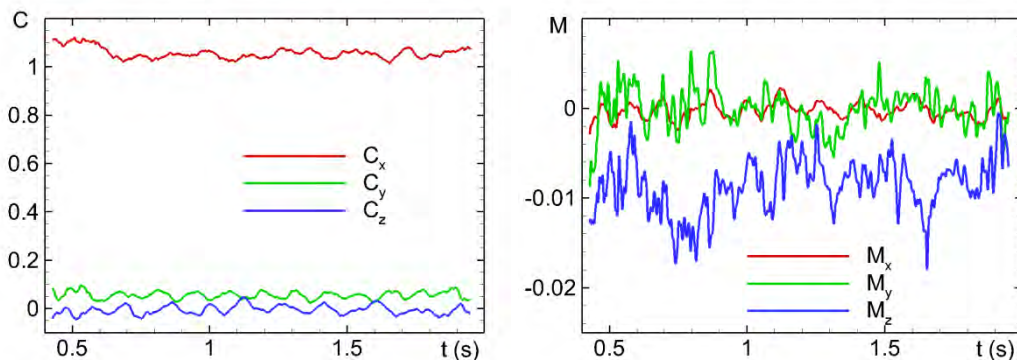


Рис. 143. Зависимость коэффициентов сил и моментов от времени, полученная методом DDES.

Наконец, на Рис. 144 показаны поля среднеквадратичных пульсаций коэффициента давления на поверхности и в следе ВА. Эти рисунки свидетельствуют о том, что наиболее существенным нестационарным нагрузкам подвергается донная область ВА, причем наиболее ярко это проявляется в области “наплыва” на поверхности ВА и области балансировочных установок щитков. Как видно из того же рисунка, основным источником нестационарности давления на поверхности, являются его пульсации в отрывающихся от ВА слоях смешения.

Полученные результаты наглядно демонстрируют преимущества DDES подхода при расчете обтекания ВА на спусковой траектории, состоящие в повышенной точности расчета и информативности полученных результатов.

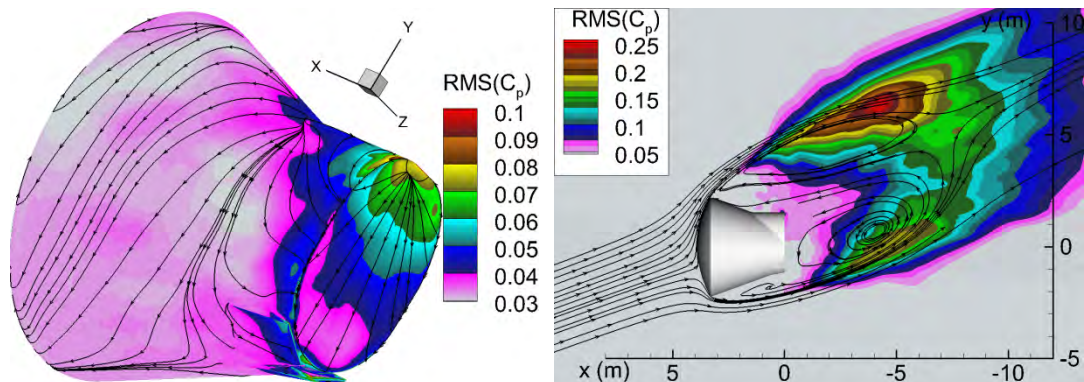


Рис. 144. Поля среднеквадратичных пульсаций давления на донном срезе ВА и в плоскости симметрии следа, рассчитанные с помощью SA DDES.

4.4.2. ОБТЕКАНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ НА УЧАСТКЕ ВЫВЕДЕНИЯ

С физической точки зрения важной особенностью данного течения является наличие интенсивных пульсаций давления на поверхности ПКК (Рис. 145), возникающих при его обтекании турбулентным потоком. Эти пульсации приводят к наличию интенсивных динамических нагрузок, которые могут оказаться критическими для конструкции ПКК и теплозащитного покрытия ВА, а также привести к потере работоспособности приборов и аппаратуры. Наконец, не менее важной проблемой является возможное превышение критических уровней шумового воздействия на экипаж ПКК. Кроме того, газодинамическая структура турбулентного потока, обтекающего КГЧ, характеризуется наличием обширных отрывных зон, вихревых следов и (в случае транс- и сверхзвуковых режимов течения) интенсивных скачков уплотнения [333].

Таким образом, надежное расчетное определение амплитуд и частот пульсаций давления на поверхности ПКК на



Рис. 145. Ракета космического назначения (САС, ПКК и РН). Фото: РКЦ «Прогресс» (с сайта lenta.ru).

участке выведения, которое очевидно является необходимым этапом проектирования таких систем, представляет собой исключительно сложную проблему, решение которой в настоящее время возможно только в рамках гибридных RANS-LES подходов к моделированию турбулентности. В настоящей диссертации такое исследование было выполнено впервые. Представленные ниже результаты расчетов опубликованы в соавторстве с А.А. Дядькиным, С.П. Рыбаком, Г.А. Трашковым, М.Х. Стрельцом и М.Л. Шуром [334], [335].

Постановка задачи

В данном разделе представлены результаты расчетов обтекания КГЧ с РН при числах Маха набегающего потока 0.6 - 1.5. Расчеты были выполнены как для полноразмерной КГЧ, так и для модельной геометрии М 1:20, экспериментальное исследование которой было выполнено в АДТ Т-128 ЦАГИ (результаты этих расчетов использовались для валидации используемого подхода).

Для проведения расчетов использовался двухэтапный зонный RANS-IDDES подход, необходимость применения которого связана с тем, что расчет всего течения (без разбиения на зоны) в рамках IDDES подхода требует неприемлемых вычислительных затрат. Это обусловлено, в первую очередь, малой толщиной пограничного слоя на начальном участке РБАС, в результате чего для разрешения даже наиболее крупных энергонесущих турбулентных структур во внешней области этого пограничного слоя требуется чрезвычайно мелкая расчетная сетка.

Схема двухэтапного расчета, а также размеры RANS и IDDES подобластей приведены на Рис. 146.

На первом этапе проводился стационарный расчет всего течения в рамках RANS с использованием модели SST [56] в сочетании с разработанной в диссертации поправкой на кривизну и вращение RC1 (см. раздел 2.1.3).

На этом этапе размер расчетной области по продольной координате составлял около $350 L_0$ (L_0 – линейный масштаб, равный 1 метру для реальной геометрии КГЧ и 1/20 метра для модельной геометрии 1:20 рассмотренной ниже), а ее размер по радиальной координате менялся от $220 L_0$ до $300 L_0$ (Рис. 146). Это намного превышает размеры КГЧ, что необходимо для исключения погрешностей, связанных с заданием на внешней границе расчетной области параметров невозмущенного потока. Отметим также, что использование наклонной боковой границы гарантирует, что она всегда является «входом» в расчетную область, что позволяет избежать вычислительных проблем, возникающих при переключении типа границы с «входной» на «выходную» в процессе итераций. Границы расчетной области по азимутальной координате φ совпадали с плоскостями симметрии потока, проходящими через оси «соседних» сопел основного ракет-

ного двигателя (ОРД) и сопел ракетного двигателя экстренного отделения (РДЭО). Таким образом, азимутальный размер области был ограничен сегментом $0 < \varphi < 45^\circ$, где плоскость $\varphi = 0$ проходила через ось одного из сопел ОРД (совпадает с декартовой полуплоскостью $z = 0, y > 0$), а плоскость $\varphi = 45^\circ$ – через ось соседнего сопла РДЭО.

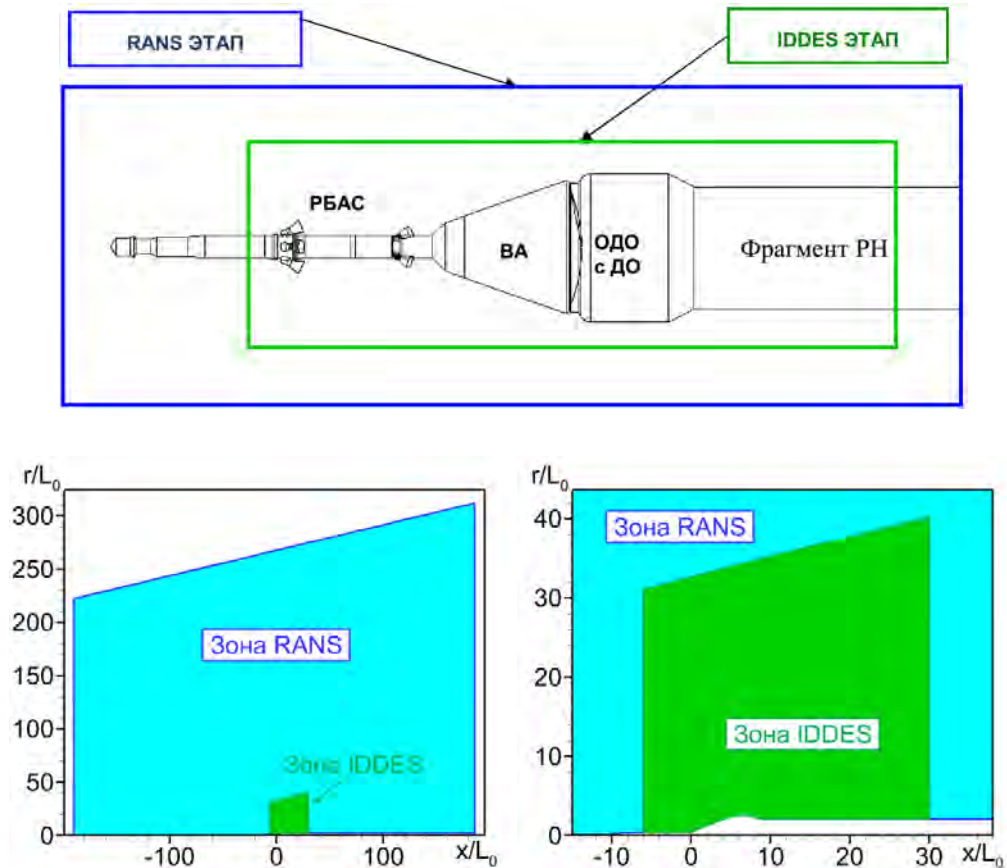


Рис. 146. RANS и IDDES зоны двухэтапного зонного RANS-IDDES расчета.
Первый ряд сопел – сопла основного ракетного двигателя;
второй ряд – сопла ракетного двигателя экстренного отделения.

На твердых поверхностях составных частей КГЧ и РН ставились условия прилипания и нулевого теплового потока. На входных и выходных участках внешней границы расчетной области газодинамические переменные определялись с использованием характеристических граничных условий, сформулированных через инварианты Римана, рассчитываемые по параметрам невозмущенного потока. Турбулентные характеристики на входной границе задавались таким образом, чтобы обеспечить быстрое формирование развитого турбулентного пограничного слоя на поверхности РБАС: $v_t = v$, $\omega_t = 10 \cdot U_\infty / L_0$, $k_t = v_t \cdot \omega_t$, где U_∞ – скорость набегающего потока. В азимутальном направлении на обеих границах, $\varphi = 0$ и $\varphi = 45^\circ$, ставились условия симметрии, реализуемые с привлечением заграничного узла сетки.

На втором этапе двухэтапного подхода с помощью SA IDDES проводится расчет нестационарного турбулентного течения в наиболее сложной и важной части потока, включающей обтекание ВА. В качестве граничных условий на входной границе IDDES задавались профили осредненных параметров потока, определенные на этой границе на первом (RANS) этапе, а для создания турбулентных пульсаций в присоединенном пограничном слое использовался генератор синтетической турбулентности NTS STG [180].

Отметим, что в расчетах использовались две различные конфигурации IDDES подобласти.

В первой (наиболее полной) конфигурации расчетная область IDDES этапа содержала как сопла РДЭО, так расположенные выше по потоку сопла ОРД. В этом случае (Рис. 146) входная граница располагалась при $x = -6.0 L_0$, то есть на расстоянии примерно пяти локальных толщин пограничного слоя вверх по потоку от сопел ОРД, а выходная граница - при $x = 30 L_0$. Как и в RANS расчетах, внешняя граница LES-подобласти постепенно расширялась вниз по потоку (ее радиус изменялся от $32 L_0$ до $40 L_0$). При этом расчет проводился в полной (360°) области по азимутальной координате.

С целью экономии вычислительных ресурсов часть расчетов проводилась в уменьшенной расчетной области. Ее входная граница была помещена в области более толстого пограничного слоя на участке между соплами ОРД и РДЭО. При этом вклад в пульсации давления на поверхности ВА, обусловленный крупными вихревыми структурами в следе сопел ОРД, учитывается лишь приближенно путем задания синтетических турбулентных возмущений на входной границе. Такой подход оправдан, поскольку этот вклад меньше, чем вклад аналогичных вихревых структур, возникающих при обтекании сопел РДЭО, расположенных гораздо ближе к ВА, и, следовательно, связанная с этим погрешность невелика. Кроме того, этот расчет проводится в половине (180°) области по азимутальной координате. Использование уменьшенной расчетной области позволяет сократить вычислительные затраты, необходимые для расчета одного варианта, примерно в 4 раза.

Геометрические обводы РБАС содержат большое число мелкомасштабных деталей, наличие которых существенно усложняет построение расчетной сетки и влечет за собой значительное увеличение времени расчетов. Учитывая это, а также принимая во внимание то обстоятельство, что указанные детали не оказывают сколько-нибудь существенного влияния на параметры осредненного течения и на пульсации давления на поверхности ВА, геометрия КГЧ была несколько упрощена (модельная геометрия приведена на Рис. 147).

Сетки для проведения описанных выше расчетов строились с учетом возможностей используемого вычислительного кода NTS, который, как уже упоминалось, позволяет проводить расчеты на многоблочных

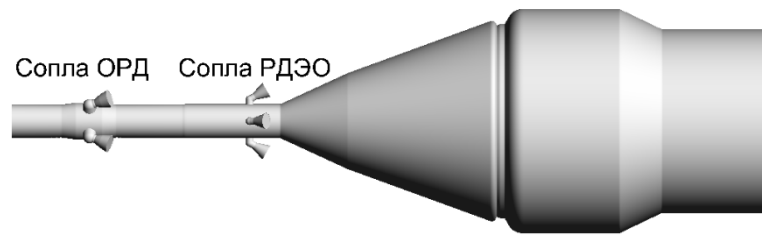


Рис. 147. Модельная геометрии КГЧ.

структурированных сетках типа «Химера», то есть на сетках, имеющих перекрывающиеся блоки и «вырезы» произвольной конфигурации. Это существенно упрощает построение сеток в областях сложной геометрической формы, поскольку исключает необходимость точной «стыковки» границ соседних блоков сетки друг с другом и требует лишь согласования между собой шагов сеток в области перекрытия блоков, где эти шаги не должны сильно отличаться друг от друга. Это необходимо для уменьшения ошибок интерполяции при постановке условий на межблочных границах.

Построение сетки проводилось в две стадии (принцип построения сеток для RANS и IDDES этапов расчета одинаков).

На первой стадии за основу бралась сетка в меридиональной плоскости (Рис. 148), которая строилась так, чтобы обеспечить разрешение всех газодинамических особенностей потока. В частности, шаги сетки сгущались вблизи твердых стенок так, чтобы величина ближайшего к стенке шага сетки в координатах «закона стенки» удовлетворяла требованию $\Delta y_1^+ < 1$, а отношение соседних шагов не превышало 1.3. При построении сеток для IDDES шаги сетки в присоединенном пограничном слое выбирались таким образом, чтобы удовлетворить требованиям, предъявляемым к сеткам для WMLES. Наконец, сетка существенно сгущалась как по продольной, так и по радиальной координате для разрешения следов сопел ОРД и РДЭО. После построения меридиональной сетки, «базовый» блок трехмерной сетки получался путем ее репликации по азимутальному углу.

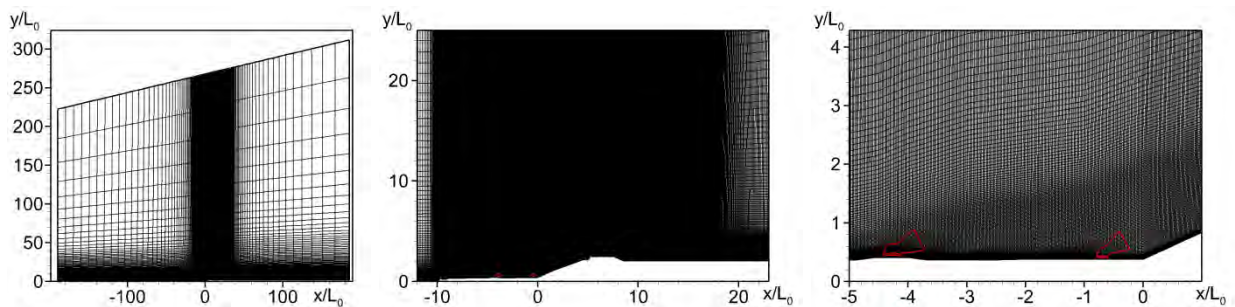


Рис. 148. «Базовая» RANS сетка в плоскости XY.

На второй стадии построения сетки в «базовом» блоке делались вырезы вокруг сопел ОРД и РДЭО (Рис. 149), которые затем «заполнялись» многоблочными сетками (Рис. 150). Границы этих дополнительных блоков были согласованы с внешними поверхностями сопел, а шаги в области их перекрытия с «базовым» блоком - с шагами этого блока.

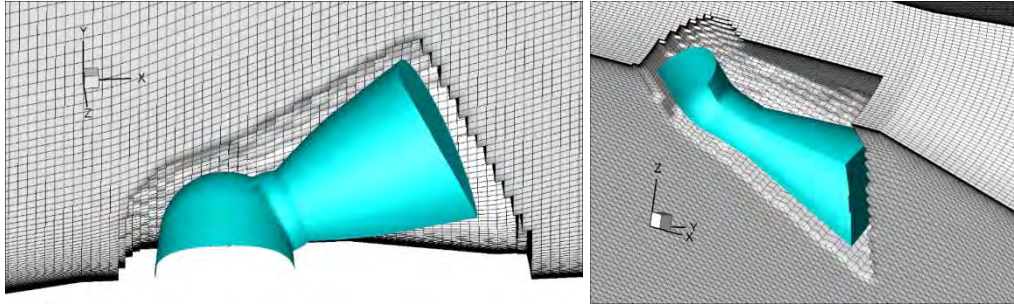


Рис. 149. Вырез в «базовой» сетке вокруг сопел ОРД и РДЭО.

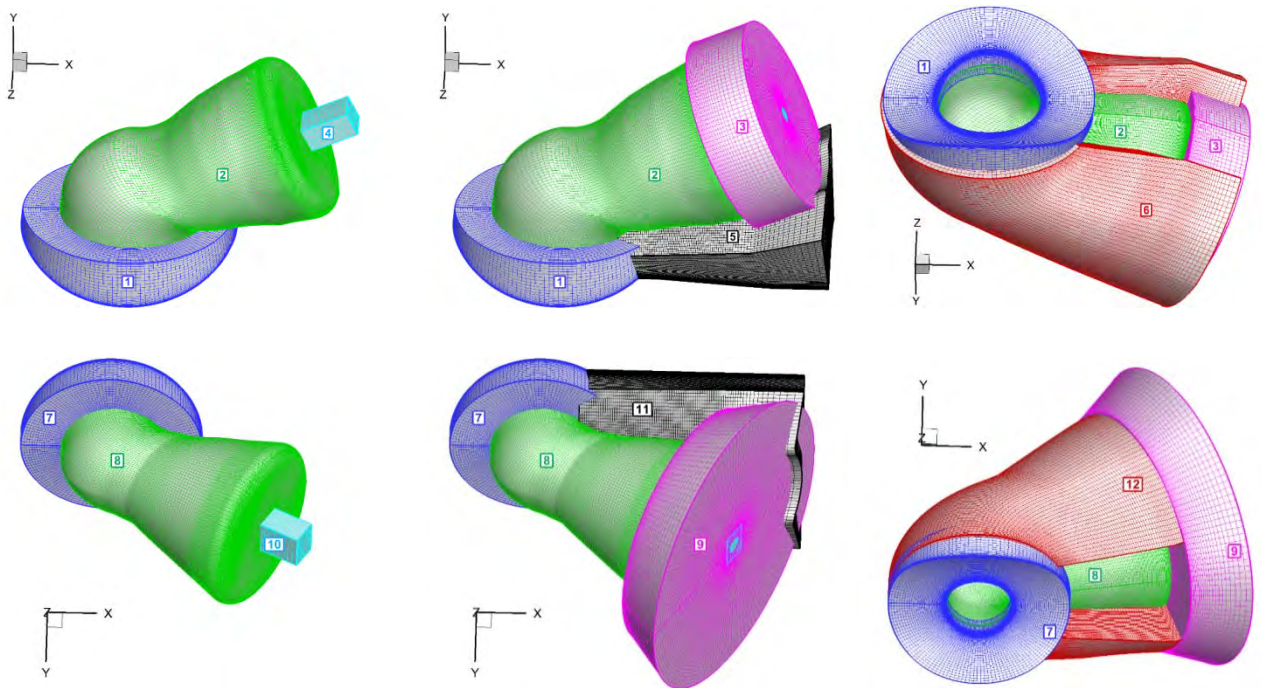


Рис. 150. Дополнительные блоки IDDES-сетки вокруг сопел ОРД (верхний ряд) и РДЭО (нижний ряд).

Общий размер сетки для RANS этапа составлял от 13 до 16 миллионов ячеек, а размер IDDES сетки зависел от того, проводился ли расчет в полной или в уменьшенной области. В первом случае он превышал 100 миллионов ячеек, а во втором составлял около 26 миллионов.

При проведении нестационарных IDDES расчетов шаг интегрирования по времени задавался равным $\Delta t = 0.005(L_0/U_\infty)$, а время выхода на статистически установившийся режим в зависимости от рассматриваемой геометрии составляло от 15 до $35 \cdot L_0/U_\infty$, что во всех случаях соответствовало двум или более временам «проноса» потока через IDDES подобласть. Затем, в

течение временного интервала от 40 до $160 \cdot L_0/U_\infty$ производилось накопление информации, необходимой для определения осредненных параметров потока, статистических характеристик турбулентности и спектральных характеристик полей давления. Указанный интервал соответствовал примерно 20 - 80 периодам срыва крупномасштабных когерентных структур при обтекании сопел РДЭО. Таким образом, используемые сетки и шаги интегрирования по времени обеспечивают надежный расчет спектров пульсаций давления на поверхности ВА в частотном диапазоне от 60 Гц до 3 кГц.

Валидация метода расчета

Как уже отмечалось, для валидации описанной выше двухэтапной методики расчета использовались экспериментальные данные, полученные в аэродинамической трубе АДТ Т-128 ЦАГИ для модели КГЧ с масштабом М 1:20 (Рис. 151). Измерения пульсаций давления производились в 25 точках на поверхности модели дифференциальными пьезорезисторными приемниками давления фирмы Kulite (модель ХТ-140-10D). Точки размещения датчиков на верхних образующих модели показаны на Рис. 152.



Рис. 151. Установка модели КГЧ на державке в рабочей части аэродинамической трубы Т-128: фото (а) и САД модель (b).

Анализ результатов измерений пульсаций давления в различных точках на поверхности модели свидетельствует о том, что наиболее интенсивные пульсации имеют место в точках, расположенных на конической части переходного отсека (точки П1-П6 на Рис. 152), где их среднеквадратичные значения достигают 17% среднего статического давления.

Валидация расчетной модели проводилась путем сравнения результатов расчета с экспериментом для одного из наиболее сложных трансзвуковых режимов с числом Маха 0.85 и углом атаки равным нулю при скоростном напоре 35621 Па. Сравнение результатов расчета обтекания модели с экспериментальными данными (Рис. 153 - Рис. 154) позволяет сделать следующие выводы.

Точность расчета аэродинамических параметров осредненного течения (Рис. 153) является вполне удовлетворительной (имеющиеся различия вызваны, вероятнее всего, несогласованностью положения начала координат и точки, в которой уровень коэффициента давления считается нулевым).

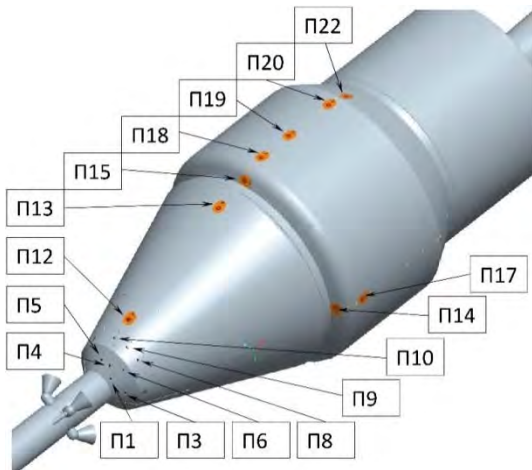


Рис. 152. Точки измерения пульсаций давления на боковой поверхности КГЧ.

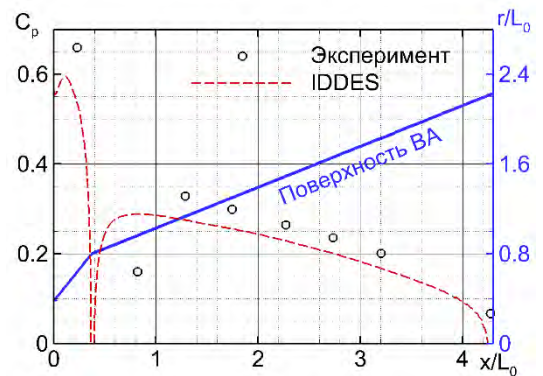


Рис. 153. Сравнение расчетных и экспериментальных распределений коэффициента давления вдоль боковой поверхности конической переходной части РБАС и ВА экспериментальной модели КГЧ.

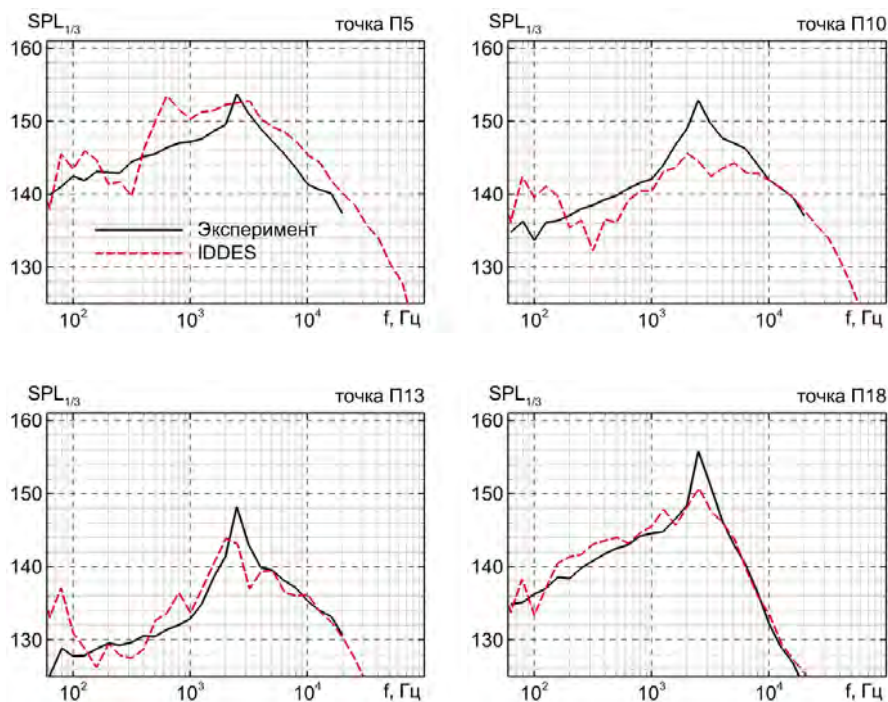


Рис. 154. Сравнение расчетных и экспериментальных спектров пульсаций давления в точках на боковой поверхности (положения точек представлены на Рис. 152).

Что касается спектральных характеристик пульсаций давления, то расчет в целом правильно описывает форму спектров и достаточно точно предсказывает частоту основного спектрального максимума (около 2.7 кГц). Однако точность расчета уровня спектров оказывается

различной для различных точек поверхности. В некоторых из них результаты расчета хорошо совпадают с экспериментальными данными, а в части точек уровень звукового давления значительно (на 5-8 дБ) отличается от эксперимента даже в диапазоне хорошо разрешаемых частот. Тем не менее, согласование расчетных и экспериментальных данных в целом можно признать удовлетворительным, что подтверждает адекватность используемой расчетной модели и свидетельствует о возможности ее использования для расчетов пульсаций давления на поверхности КГЧ при реальных условиях полета, результаты которых представлены ниже.

Результаты расчетов обтекания натурной КГЧ

Структура течения

Визуализации результатов расчета трансзвукового ($M_\infty = 0.85$) обтекания КГЧ, представленные на Рис. 155, иллюстрируют исключительно сложную вихревую структуру потока. Именно она определяет представляющие наибольший практический интерес пульсации давления на поверхности ВА, которые возникают, главным образом, в результате взаимодействия с этой поверхностью интенсивных турбулентных вихрей, населяющих пограничный слой на поверхности РБАС и след за соплами ОРД и РДЭО.

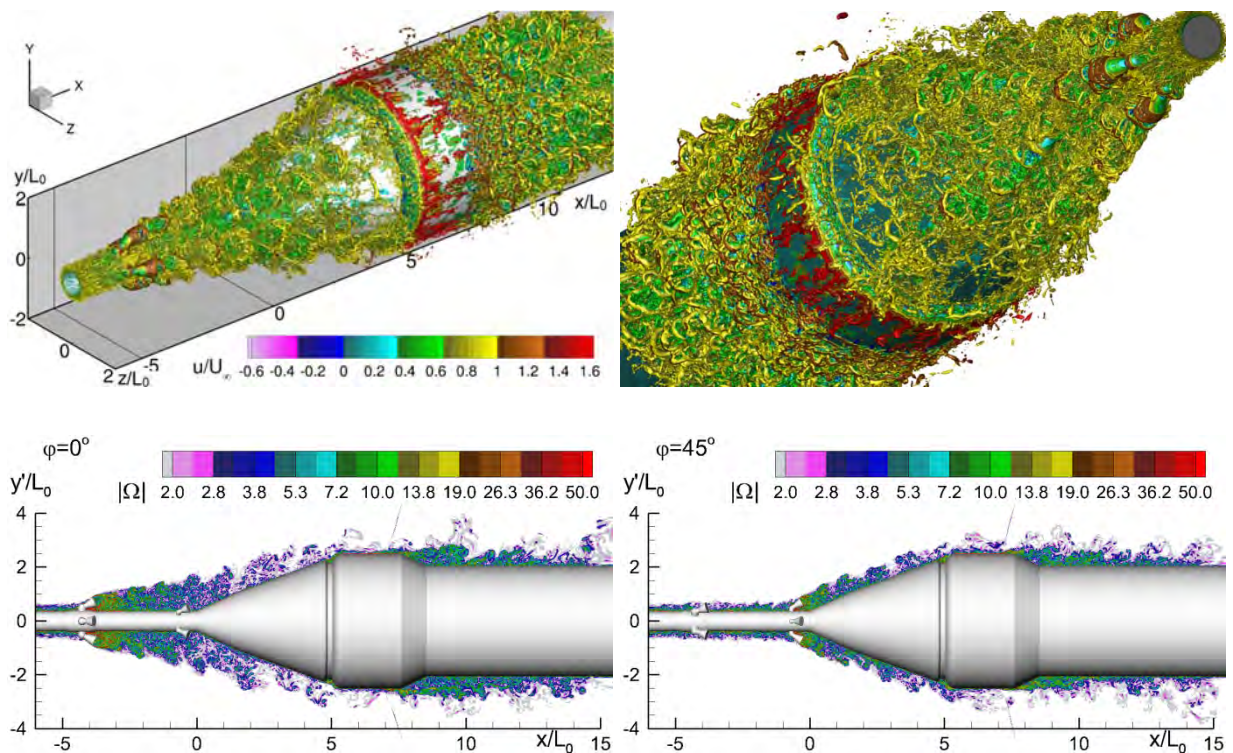


Рис. 155. Мгновенная картина вихревых структур в потоке, обтекающем КГЧ при $M_\infty = 0.85$: изо-поверхность закрутки $\lambda_2 = 2$, раскрашенная в соответствии с величиной продольной скорости (сверху) и поле завихренности в плоскостях симметрии сопел ОРД и РДЭО (снизу).

Важной особенностью рассматриваемого течения является образование сверхзвуковой зоны над обтекателем двигательного отсека (ОДО), которая хорошо видна на Рис. 156. Эта зона

замыкается скачком уплотнения, положение и интенсивность которого изменяются во времени вследствие взаимодействия с турбулентным пограничным слоем, что, в свою очередь, приводит к интенсивным пульсациям давления на поверхности под скачком. Кроме того, в результате взаимодействия со скачком пограничный слой отрывается от поверхности.

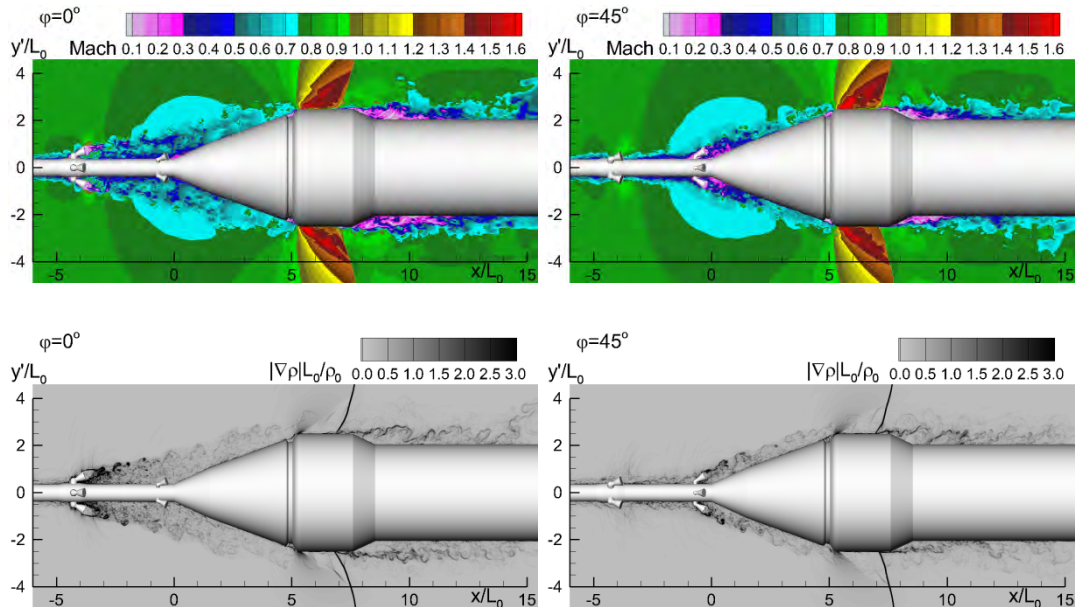


Рис. 156. Поля числа Маха и модуля градиента средней плотности («вычислительные шпирен-картины») в плоскостях симметрии сопел ОРД и РДЭО ($M_\infty = 0.85$).

Влияние сопел РДЭО на пульсации давления на поверхности ВА.

Для выяснения количественного вклада следов сопел ОРД и РДЭО на величину пульсаций давления на поверхности ВА были проведены два расчета обтекания РБАС при $M_\infty = 1.5$. В первом из них рассматривалась полная геометрия РБАС, а во втором – эта же геометрия без сопел.

Сравнение результатов этих двух расчетов (Рис. 157 - Рис. 158) свидетельствует о том, что влияние сопел РБАС на характеристики пульсаций давления на расположенной вниз по потоку от них поверхности оказывается различным вдоль образующих ВА, проходящих через след сопел РДЭО, и вдоль образующих, расположенных между этими соплами. В первом случае наличие сопел приводит к росту суммарной интенсивности пульсаций давления, причем этот рост усиливается по мере движения вниз по потоку. Это объясняется взаимодействием с поверхностью крупных вихревых структур следа, которое начинается на некотором расстоянии от конического переходного участка. При этом вклад сопел в пульсации давления на ВА наиболее сильно выражен в области относительно низких частот $f = 200-400$ Гц, близких к частоте срыва крупных вихрей при обтекании сопел РДЭО (Рис. 158).

Во втором случае (промежуток между соплами РДЭО) наличие сопел приводит к снижению интенсивности пульсаций во всем диапазоне частот. Это снижение наиболее ярко проявляется в

начале конической части ВА и ослабевает по мере движения вниз по потоку. Такое поведение, по-видимому, объясняется ускорением потока в пространстве между соплами, сопровождающимся подавлением турбулентных пульсаций. В результате, хотя наличие сопел приводит к значительному (до 7 дБ) повышению локальных динамических нагрузок на поверхность ВА, их интегральный (осредненный по площади ВА) вклад оказывается незначительным и составляет всего 0.5 дБ.

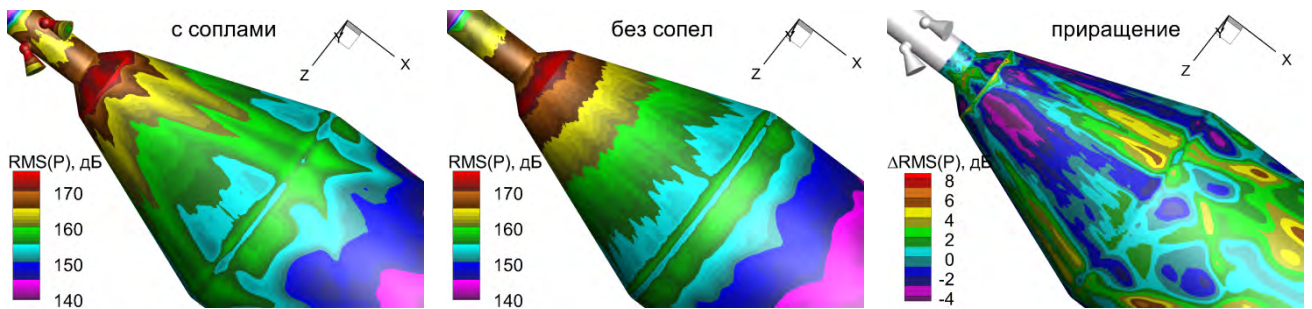


Рис. 157. Поля среднеквадратичных пульсаций давления при $M_\infty = 1.5$ при наличии и отсутствии сопел РБАС и приращение уровня пульсаций, обусловленное наличием сопел.

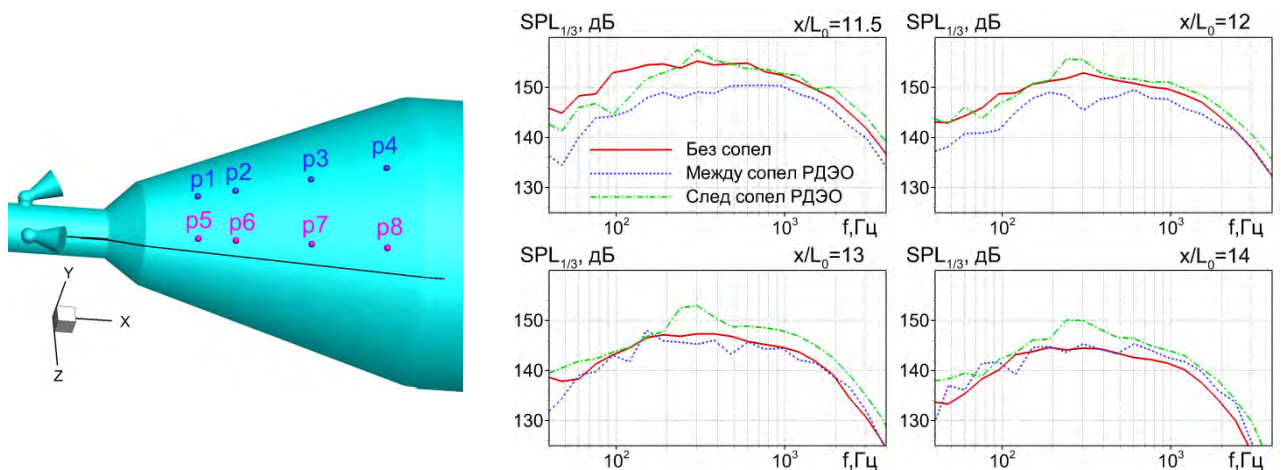


Рис. 158. Влияние сопел РБАС на спектры давления на поверхности ВА в следе сопел РДЭО и между этими соплами при $x/L_0 = 11.5, 12, 13$ и 14 .

Влияние высоты полета

При увеличении высоты полета в плотных слоях атмосферы происходит одновременное изменение нескольких параметров. В частности, при этом увеличивается скорость полета и падают давление, температура и плотность воздуха. Все это приводит к тому, что в процессе набора высоты возрастает число Маха, а число Рейнольдса остается практически постоянным и составляет от 10^7 до $1.75 \cdot 10^7$. В связи с этим, для выяснения степени влияния высоты полета на характеристики обтекания РБАС и ВА была проведена серия расчетов при числах Маха от 0.85 до 1.3 и фиксированном числе Рейнольдса $1.2 \cdot 10^7$.

На Рис. 159 приведены мгновенные поля модуля градиента плотности, полученные в этой серии. Видно, что для дозвуковых режимов ($M_\infty = 0.85 - 0.95$) картина обтекания РБАС и ВА слабо зависит от числа Маха набегающего потока. Наиболее чувствительная область течения расположена над ОДО и примыкающей к ней частью РН, где возникает сверхзвуковая зона, которую замыкает скачок уплотнения. Размер этой зоны, положение скачка, а также конфигурация отрывной области, возникающей за скачком, крайне чувствительны к величине числа Маха набегающего потока. Видно, что с ростом числа Маха скачок уплотнения, возникающий над ОДО, а вместе с ним и точка отрыва сдвигаются (начиная с $M_\infty = 0.95$, поток отрывается от угловой точки ОДО).

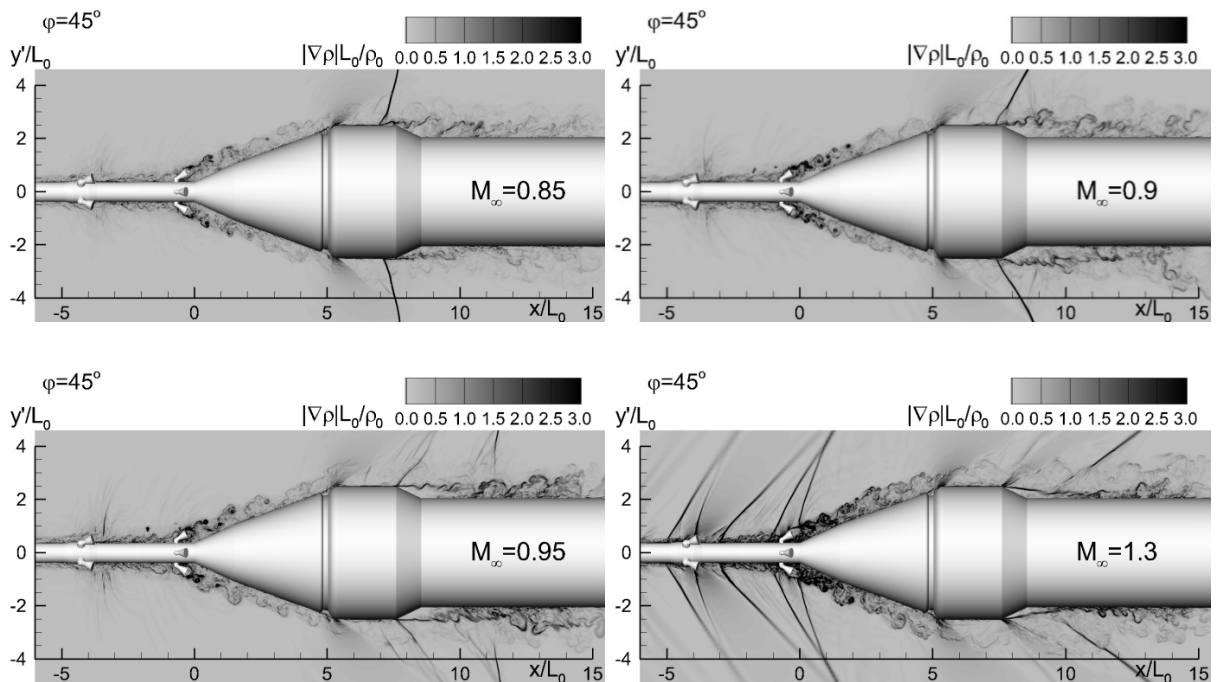


Рис. 159. Мгновенные поля градиента плотности («вычислительные шлирен-картины»), для разных чисел Маха набегающего потока.

При переходе к сверхзвуковому режиму ($M_\infty = 1.3$) практически весь поток вне пограничного слоя становится сверхзвуковым (исключение составляет лишь ограниченная область в окрестности ВА), вследствие чего различные выступающие элементы КГЧ создают в этом потоке косые скачки уплотнения, формирующие сложную ударно-волновую картину течения.

Анализ визуализаций турбулентных структур в окрестности КГЧ (Рис. 160) свидетельствует о слабом влиянии числа Маха полета на характеристики турбулентности в окрестности РБАС и ВА. Видно, что для сверхзвукового режима ($M_\infty = 1.3$) интенсивность пульсаций несколько ниже, чем для дозвуковых режимов, однако это различие незначительно. Наиболее существенное различие наблюдается в отрывной зоне, расположенной в окрестности стыка ОДО и РН: интенсивность турбулентных возмущений возрастает с ростом размера этой области. Эти

выводы подтверждаются сравнением распределений разрешенной кинетической энергии турбулентности в плоскости симметрии сопел РДЭО (Рис. 161).

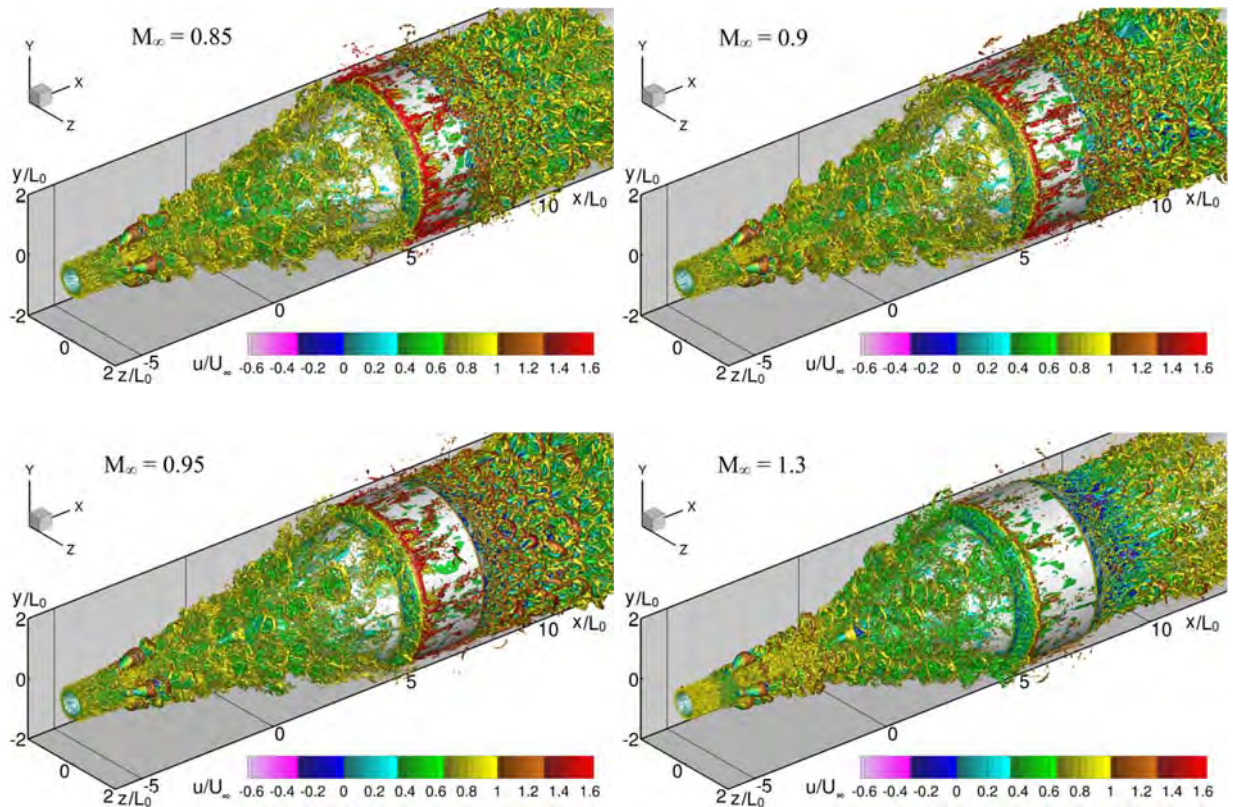


Рис. 160. Мгновенная изоповерхность закрутки, окрашенная продольной компонентой скорости, для разных чисел Маха набегающего потока.

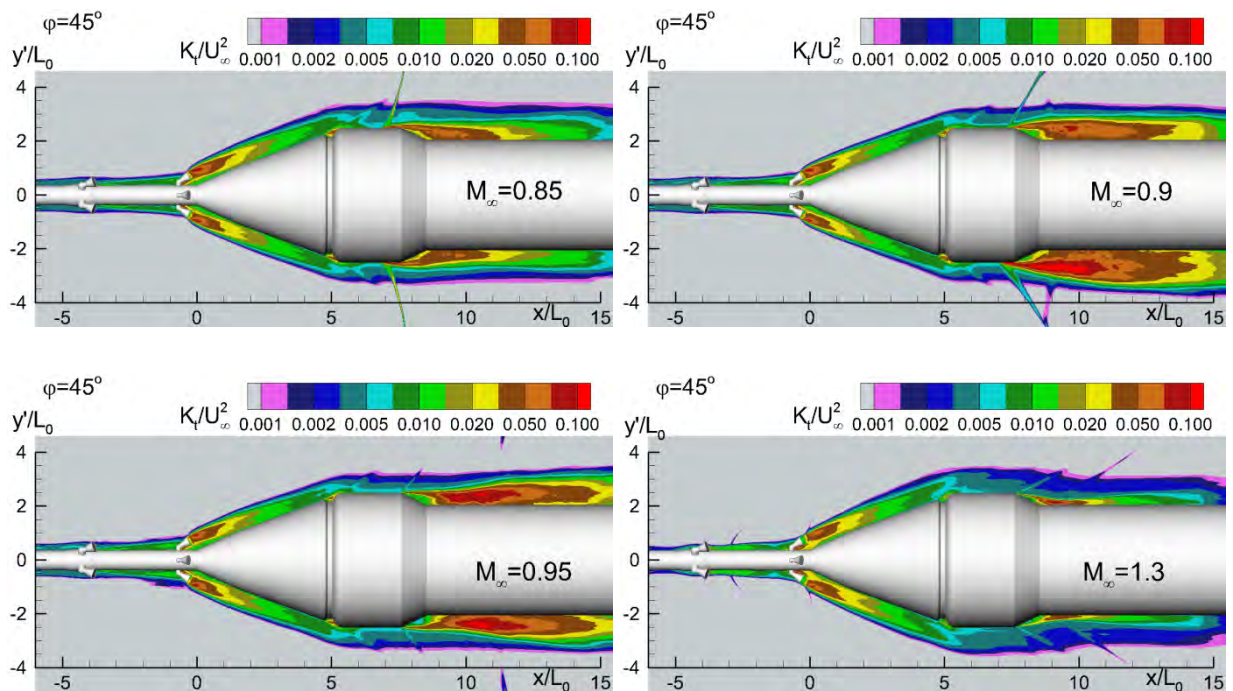


Рис. 161. Влияние числа Маха полета на поле разрешенной кинетической энергии турбулентности.

Что касается влияния числа Маха на распределение коэффициента давления по поверхности КГЧ и РН (Рис. 162), то оно заключается в следующем. С ростом числа Маха коэффициент давления на поверхности ВА и ОДО монотонно возрастает. Одновременно с этим зона пониженного давления, возникающая на поверхности ОДО и продолжающаяся до скачка уплотнения, смещается вниз по потоку вместе с этим скачком. Это приводит к немонотонному поведению распределения давления на некоторых участках поверхности. Так, например, коэффициент давления в месте стыка ОДО и РН при $M_\infty = 0.9$ и при $M_\infty = 1.3$ примерно одинаков (около -0.4), а при $M_\infty = 0.95$ оказывается заметно ниже (около -0.6).

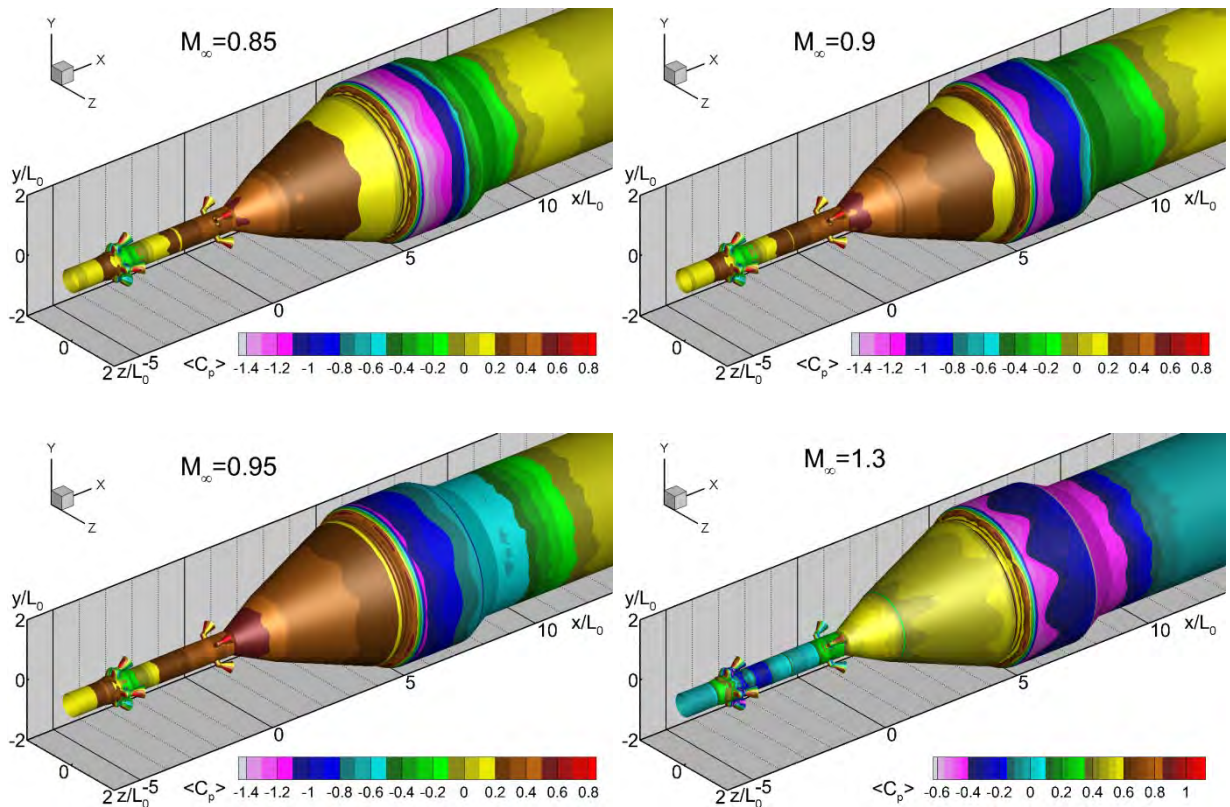


Рис. 162. Влияние числа Маха полета на распределение осредненного по времени коэффициента давления по поверхности КГЧ

При анализе влияния числа Маха на поля среднеквадратичных отклонений пульсаций давления, представленные на Рис. 163 и Рис. 164, прослеживаются следующие тенденции. Уровень звукового давления на поверхности РБАС и ВА, а также в их окрестности, монотонно (хотя и незначительно) возрастает с ростом числа Маха, а на поверхности ОДО наблюдается обратная картина. Причины такого поведения отчасти объясняют спектры, приведенные на Рис. 165. Видно, что в окрестности начала ВА ($x = 2$ м) спектры для дозвуковых режимов ($M_\infty = 0.85 - 0.95$) близки между собой, а спектр сверхзвукового режима ($M_\infty = 1.3$) несколько выше в области высоких частот ($f > 300$ Гц). К началу ОДО ($x = 6$ м) происходит падение уровня шума на всех частотах, как в следе сопел ОРД, так и в следе сопел РДЭО. Видно, что чем выше

число Маха, тем сильнее это падение. В результате третьоктавный спектр для сверхзвукового режима практически совпадает со спектрами для дозвуковых режимов на высоких частотах ($f > 300$ Гц), однако оказывается существенно (примерно на 7-8 дБ) ниже на низких частотах.

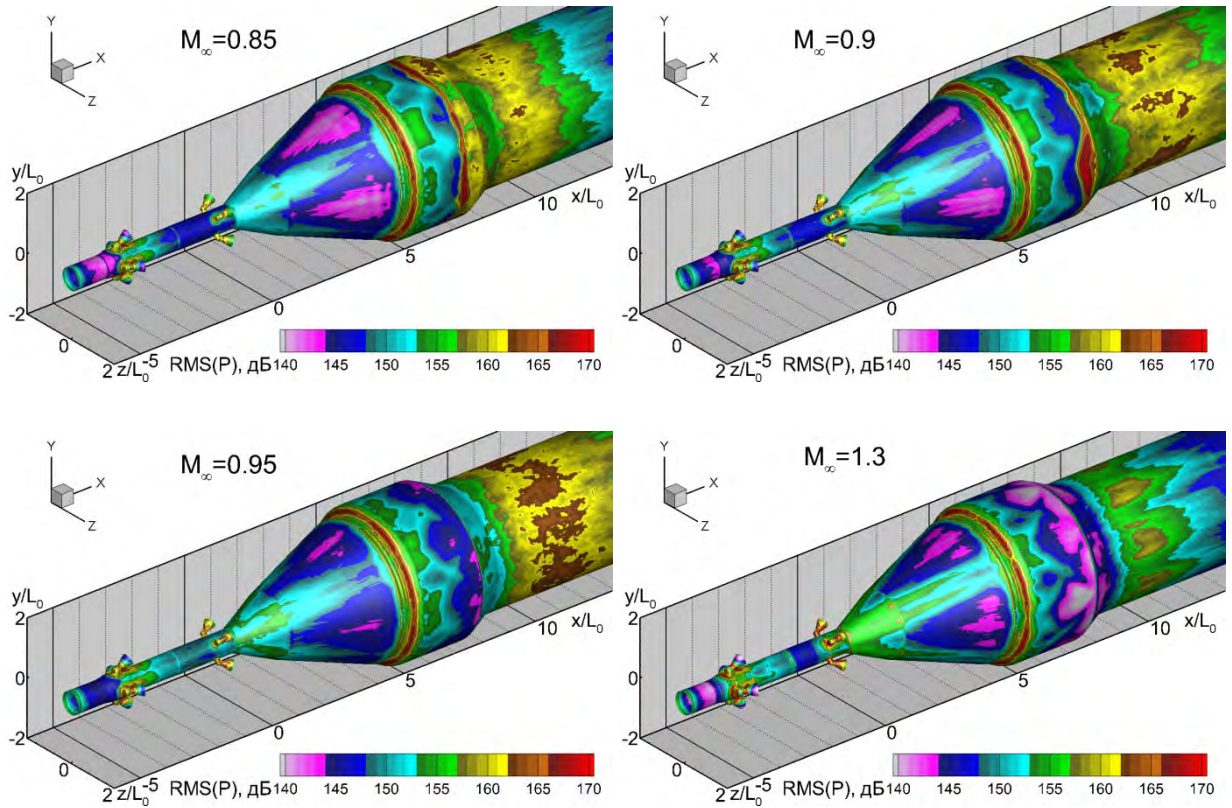


Рис. 163. Влияние числа Маха полета на распределение средневладратичных пульсаций давления (дБ) по поверхности КГЧ и прилегающей части РН.

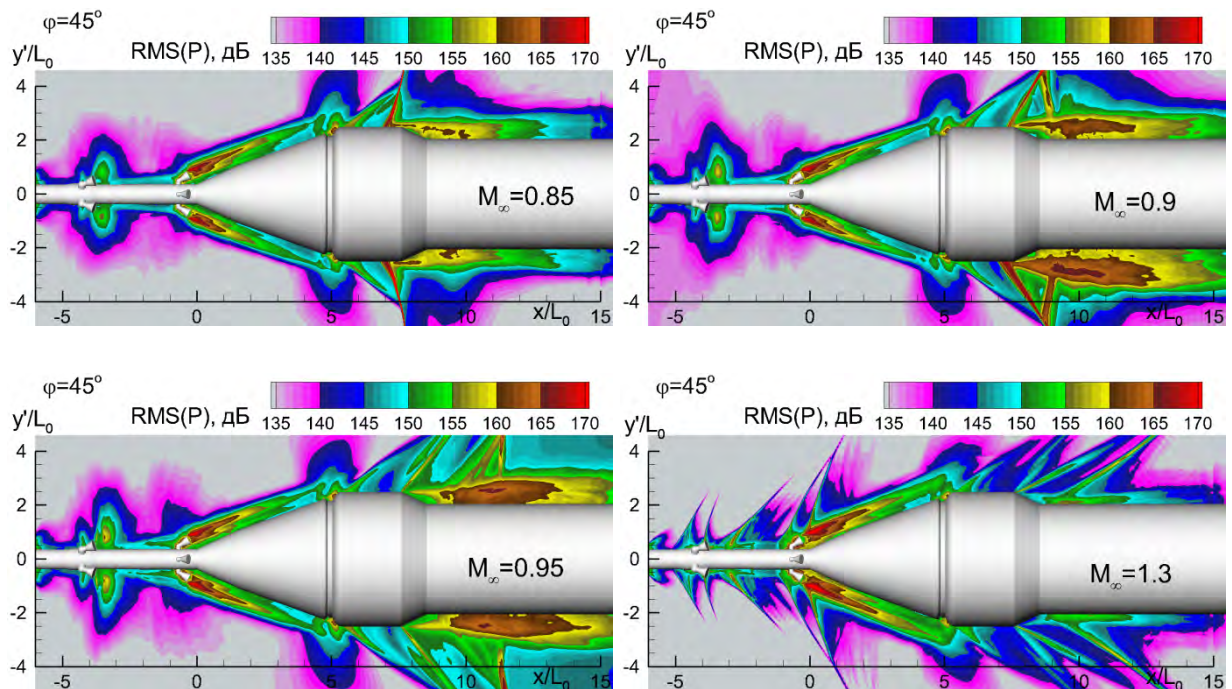


Рис. 164. Влияние числа Маха полета на поле средневладратичных пульсаций давления (дБ) в плоскости симметрии сопел РДЭО.

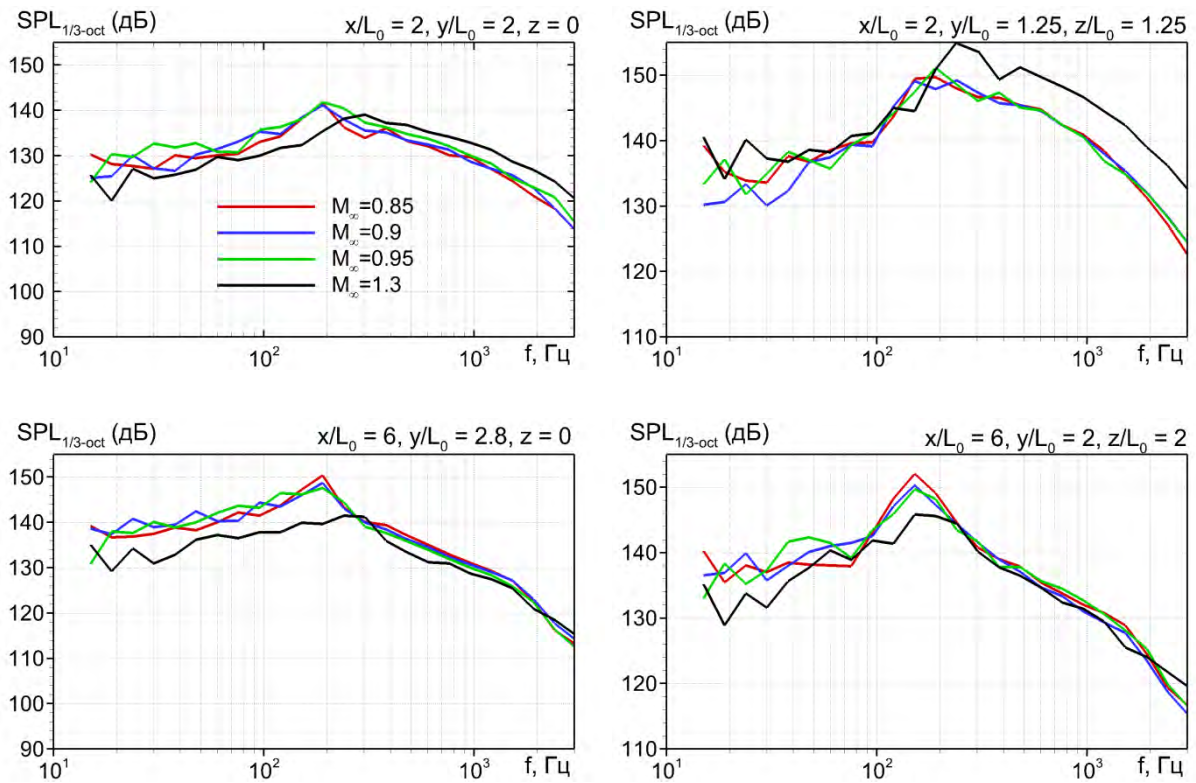


Рис. 165. Влияние числа Маха полета на третьоктавные спектры давления в пограничном слое у поверхности ВА ($x/L_0 = 2$) и ОДО ($x/L_0 = 6$) в следе сопел ОРД и РДЭО.

Влияние расположения сопел

В компоновке РБАС с двумя рядами сопел (ОРД и РДЭО) возможны два варианта их взаимного расположения: в следе друг за другом или со смещением на азимутальный угол 45° (в большинстве расчетов рассматривалась именно эта конфигурация)¹⁷. Для того, чтобы оценить влияние взаимного расположения сопел на акустическую нагрузку на ВА и ДО, при $M_\infty = 0.95$ были проведены расчеты с обоими вариантами взаимного расположения. Результаты этих расчетов представлены на Рис. 166 – 171. Анализ этих рисунков позволяет сделать следующие выводы.

Как следует из Рис. 166, при последовательном размещении сопел распределение давления по поверхности ВА и ОДО становится несколько менее однородным по азимутальному направлению. Это связано с тем, что при компоновке со смещением следы перекрывают почти всю область, и их влияние заметно при любых азимутальных углах (Рис. 167). Напротив, при последовательном расположении сопел между их следами ($\varphi = \pi/4 + \pi k/2$, $k = 0, 1, 2, 3$) расположены области, в которых турбулентные возмущения имеются лишь в тонких пограничных слоях. Эти области хорошо видны на визуализации изоповерхности закрутки (Рис. 168).

¹⁷ Другие варианты расположения не обладают симметрией и поэтому могут привести к возникновению силы, закручивающей космический корабль вокруг его оси.

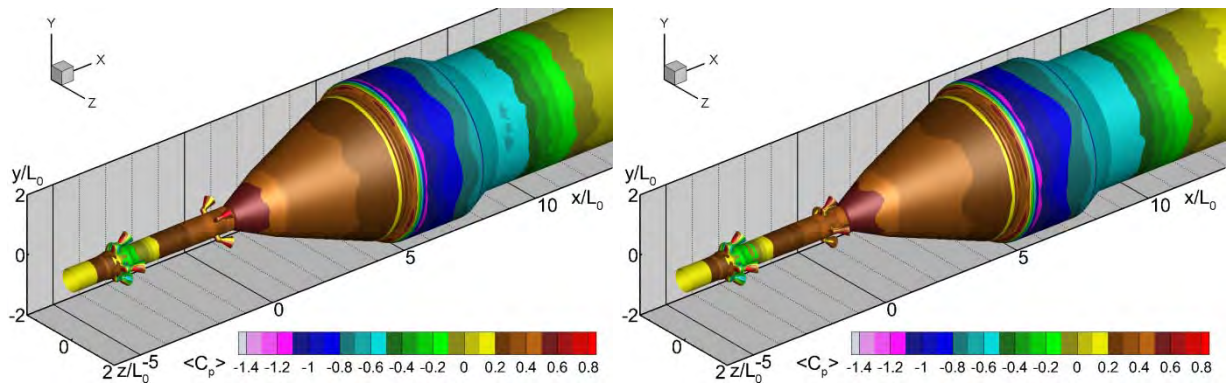


Рис. 166. Распределение коэффициента давления по поверхности КГЧ для смещенного (слева) и последовательного (справа) расположения сопел РБАС.

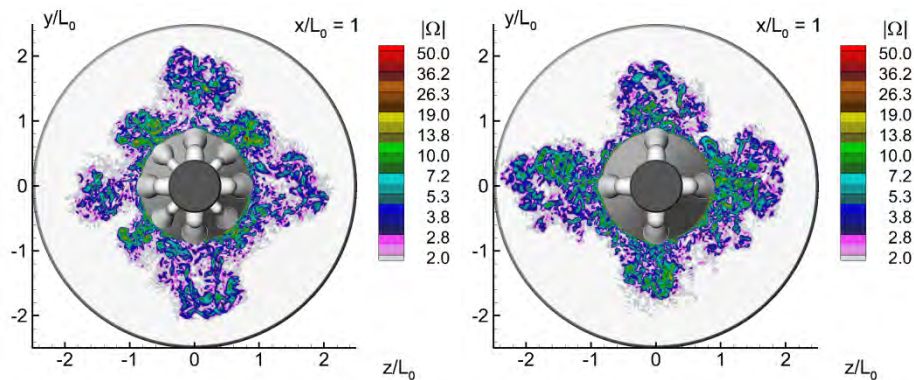


Рис. 167. Мгновенные поля завихренности в сечении $x = 1$ м для смещенного (слева) и последовательного (справа) расположения сопел РБАС.

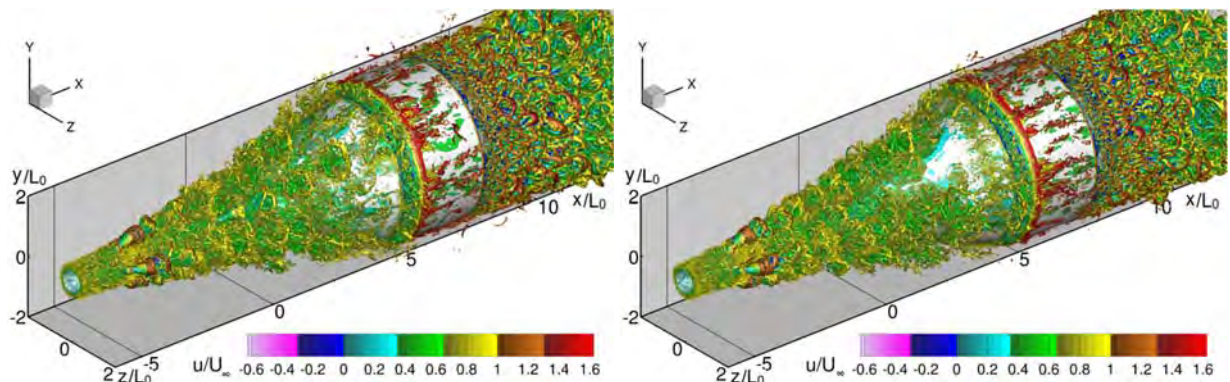


Рис. 168. Мгновенная изоповерхность закрутки, окрашенная продольной компонентой скорости для смещенного (слева) и последовательного (справа) расположения сопел РБАС.

Важным обстоятельством является то, что при последовательной компоновке след от сопел ОРД оказывает существенное влияние на обтекание сопел РДЭО. Результатом этого влияния является более высокий уровень пульсаций в ближнем следе сопел РДЭО и, одновременно, ускоренное разрушение вихревых структур, ведущее к более быстрому затуханию следа. В частности, в окрестности середины ВА ($x/L_0 = 3$) среднеквадратичные отклонения пульсаций давления в следе сопел РДЭО при последовательной компоновке сопел оказываются примерно на 5 дБ ниже, чем при их размещении со сдвигом 45° (Рис. 169).

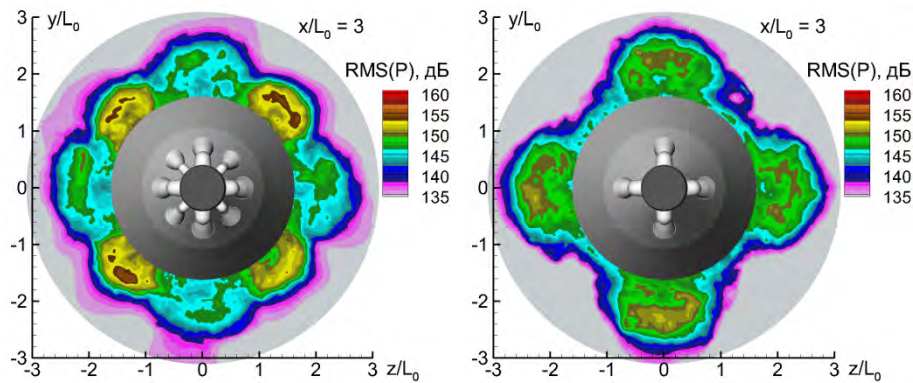


Рис. 169. Мгновенные поля среднеквадратичных пульсаций давления (дБ) в сечении $x=3$ м для смещенного (слева) и последовательного (справа) расположения сопел РБАС.

Что касается влияния компоновки на акустическую нагрузку на поверхности КГЧ, то оно существенно зависит от расстояния от сопел РДЭО до рассматриваемого сечения. Так, при последовательной компоновке в ближнем следе этих сопел на поверхности РБАС акустическая нагрузка возрастает примерно на 5 дБ (Рис. 170). На поверхности ВА за счет ускоренного разрушения следа за соплами эта нагрузка падает, причем ее максимальное падение превышает 5 дБ. Наконец, на поверхности ОДО в следе сопел РДЭО уровень пульсаций давления на поверхности для последовательной компоновки несколько выше, а между соплами – ниже. Эти выводы подтверждаются спектрами давления в точках, расположенных в пограничном слое на поверхности ВА и ОДО (Рис. 171).

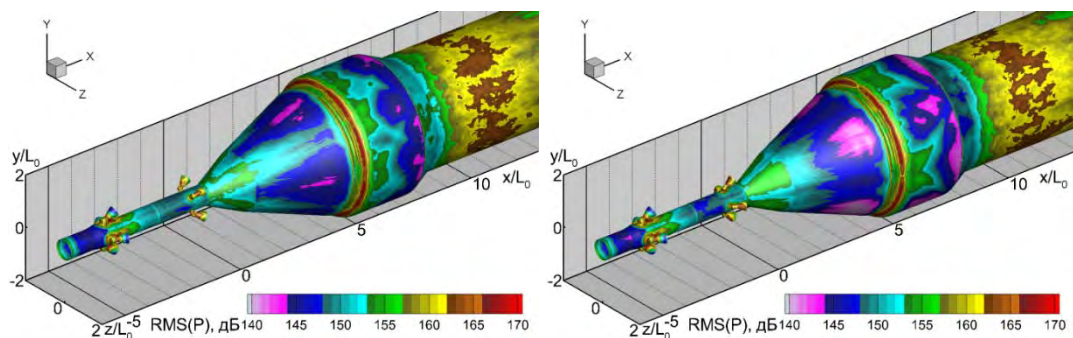


Рис. 170. Поля среднеквадратичных пульсаций давления (дБ) на поверхности КГЧ и прилегающей части РН для смещенного (слева) и последовательного (справа) расположения сопел РБАС.

Влияние угла атаки

Для оценки влияния угла атаки полета на пульсационные характеристики на поверхности КГЧ при $M_\infty = 0.95$ был проведен расчет обтекания КГЧ под углом атаки в плоскости ХУ равном 10° . В этом случае картина течения существенно меняется по сравнению с нулевым углом атаки.

Прежде всего, давление естественно возрастает на наветренной поверхности и падает на подветренной стороне КГЧ (Рис. 172).

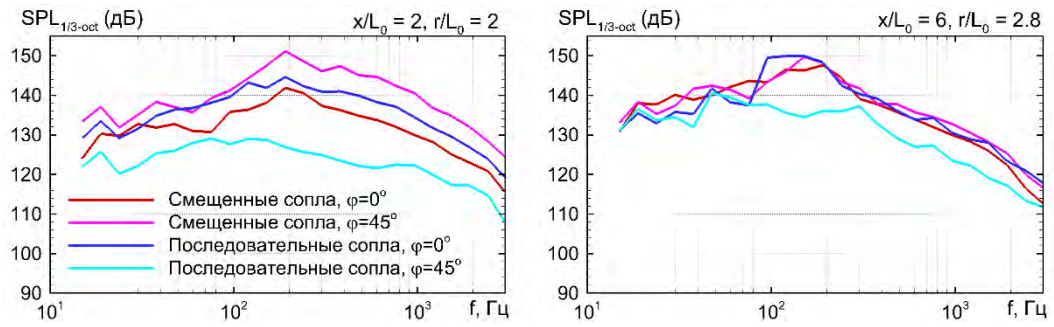


Рис. 171. Третьооктавные спектры давления в пограничных слоях на поверхностях ВА ($x/L_0 = 2$) и ОДО ($x/L_0 = 6$) в плоскостях $\varphi=0^\circ$ и $\varphi=45^\circ$ для разного расположения сопел РДЭО.

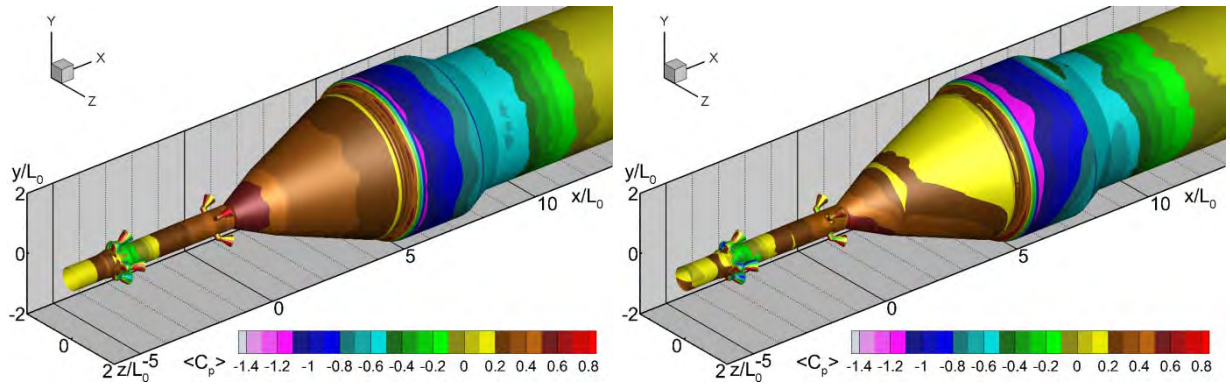


Рис. 172. Распределение коэффициента давления по поверхности КГЧ для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

Что касается акустической нагрузки на поверхность КГЧ, то ее наиболее существенные изменения, связанные с ненулевым углом атаки, состоят в следующем.

Турбулентные следы от сопел ОРД и РДЭО смещаются относительно оси КГЧ, что приводит к более тесному взаимодействию этих следов с поверхностным пограничным слоем с наветренной стороны и их уходу от поверхности с подветренной стороны (Рис. 173 - Рис. 174). При этом следы, возникшие с наветренной стороны, постепенно «перетекают» на подветренную сторону, в результате чего пульсации давления на наветренной стороне определяются исключительно турбулентностью в присоединенном пограничном слое (Рис. 175).

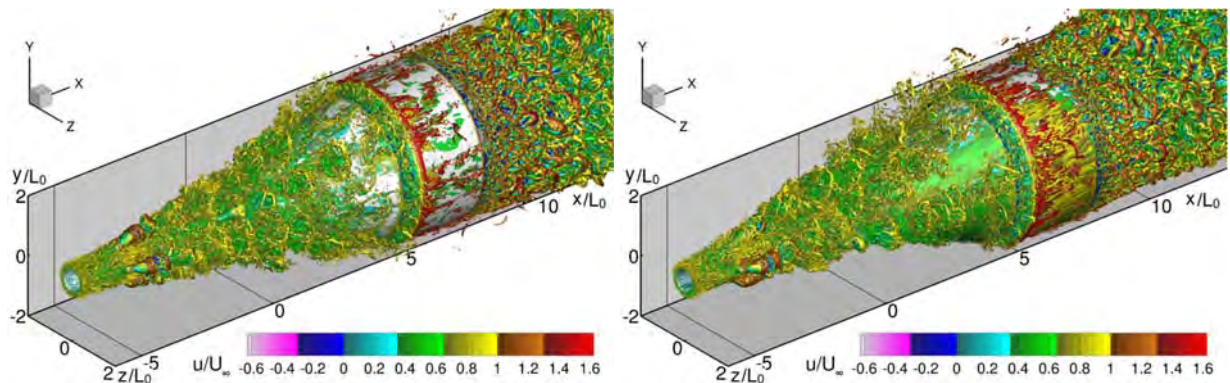


Рис. 173. Изоповерхность закрутки, окрашенная продольной компонентой для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

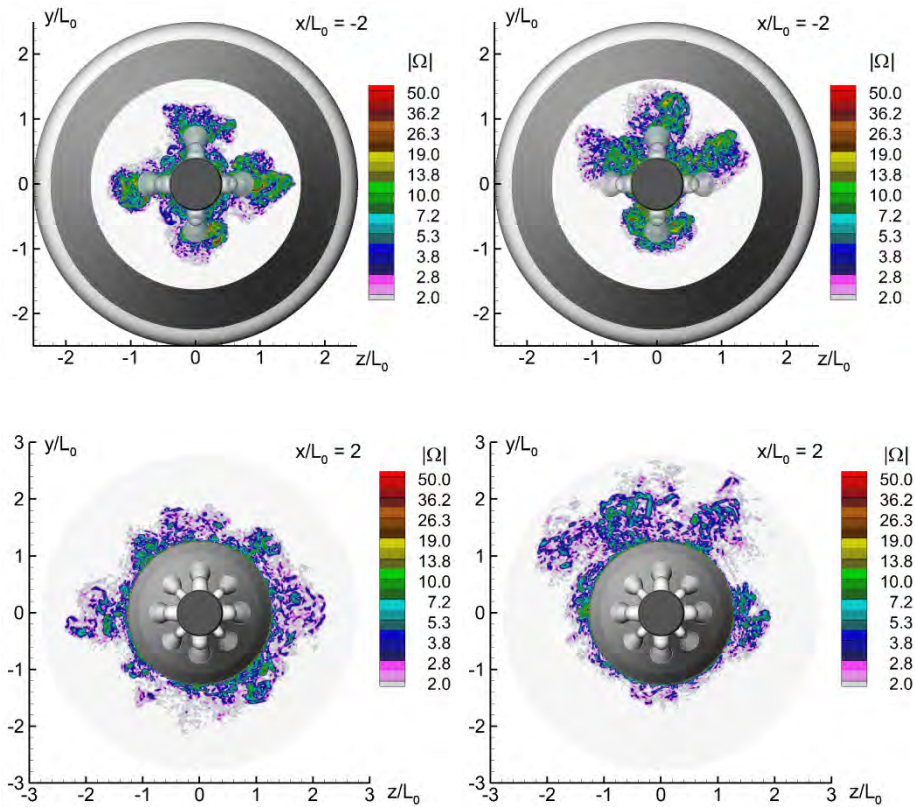


Рис. 174. Мгновенные поля завихренности в сечениях $x/L_0 = -2$ и $x/L_0 = 2$ для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

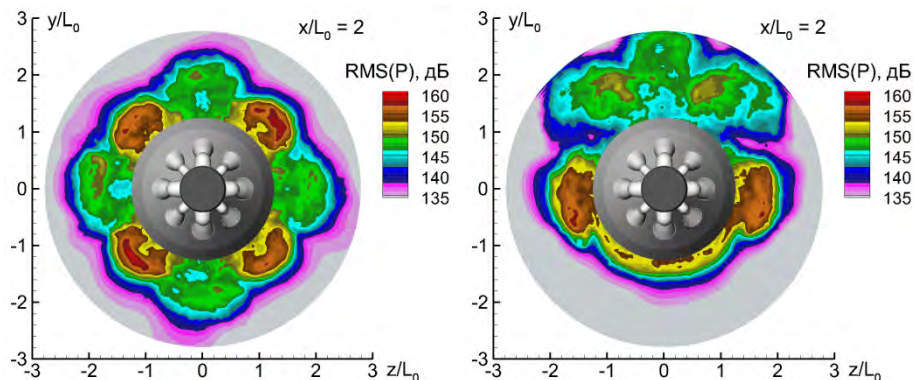


Рис. 175. Поля среднеквадратичных пульсаций давления (дБ) в сечении $x/L_0 = 2$ для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

Размер отрывной зоны в окрестности стыка ОДО и РН существенно меняется по азимутальному углу. При этом он достигает минимального значения на наветренной стороне РН и максимального – на подветренной стороне (Рис. 176). Структура ударных волн также меняется в азимутальном направлении: на подветренной стороне скачок примыкает к поверхности в середине ОДО (непосредственно перед точкой отрыва), а на наветренной стороне он гораздо слабее и сдвинут вниз по потоку.

Столь масштабное изменение структуры потока естественно приводит к изменению уровня пульсаций давления на различных составляющих КГЧ. Так, на поверхности ВА ($1.5 \leq x/L_0 \leq 4.5$)

из-за натекания следов сопел РДЭО наблюдается увеличение уровня пульсаций давления на наветренной стороне, а на подветренной стороне этот уровень снижается из-за отдаления следов от поверхности (Рис. 177 - Рис. 179). На поверхности ОДО ($5 \leq x/L_0 \leq 7.5$) наблюдается обратная ситуация. Совокупное влияние следов сопел РДЭО, которые «перетекли» на подветренную сторону, и более раннего и массивного отрыва приводит к увеличению акустической нагрузки на подветренной стороне. На наветренной стороне уровень пульсаций давления определяется только турбулентными пульсациями в присоединенном пограничном слое и, следовательно, оказывается ниже, чем при нулевом угле атаки. В результате всех этих изменений общий уровень акустической нагрузки на поверхность ВА и ОДО несколько снижается.

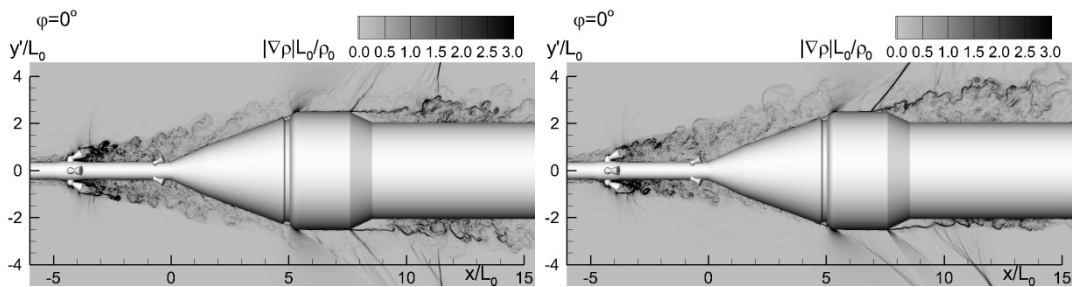


Рис. 176. Мгновенные поля градиента плотности («численные шпирен картины») для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

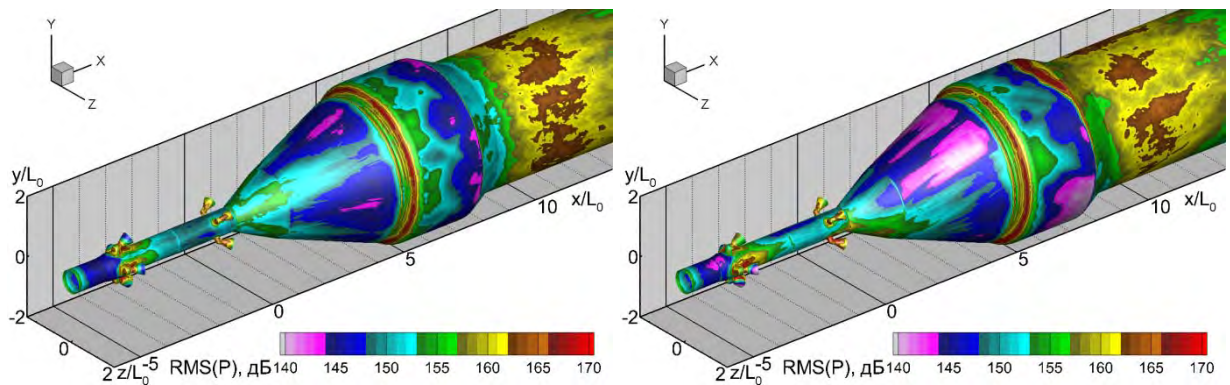


Рис. 177. Поля среднеквадратичных пульсаций давления (дБ) на поверхности КГЧ и прилегающей части РН для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

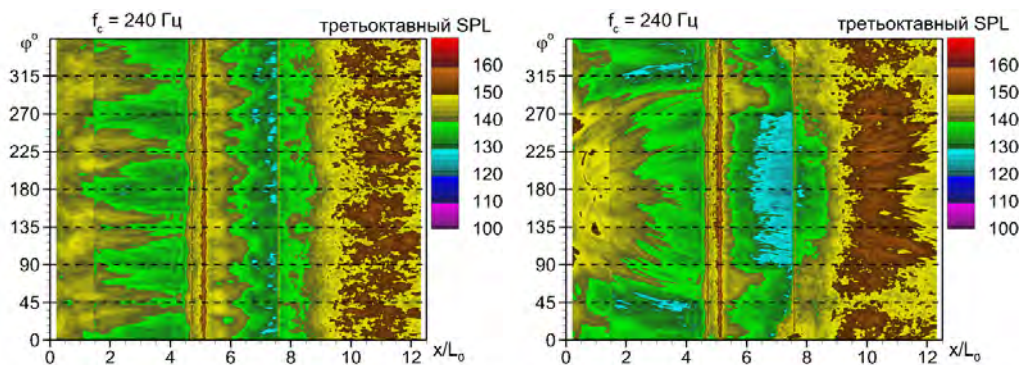


Рис. 178. Поля интенсивности пульсаций давления для третьооктавного интервала частот с центром в 240 Гц на поверхности КГЧ и прилегающей части РН для углов атаки 0° (слева) и 10° (справа).

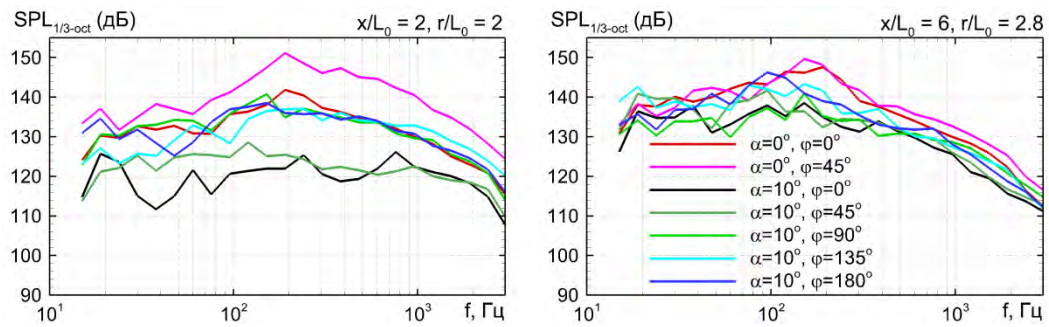


Рис. 179. Третьооктавные спектры давления в пограничном слое на поверхностях ВА ($x/L_0 = 2$) и ОДО ($x/L_0 = 6$) в следе сопел ОРД и РДЭО для углов атаки 0° и 10° .

4.4.3. ОБТЕКАНИЕ ПИЛОТИРУЕМОГО КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ ПРИ АВАРИЙНОМ ОТДЕЛЕНИИ ОГБ

Одной из наиболее важных задач, возникающих при проектировании ПКК, является создание надежной системы спасения экипажа в случае возникновения угрозы его жизни на начальной стадии полета. Эта система (система аварийного спасения – САС) должна обеспечивать отделение ОГБ от обтекателя двигательного отсека (ДО) при активации РБАС, которая осуществляется при возникновении аварийной ситуации. Однако процесс разделения сопровождается возникновением дополнительных динамических нагрузок на поверхности экрана ВА и обтекателя ДО. Это обусловлено как непосредственным воздействием на них выхлопных струй ОРД и РДЭО, так и появлением и последующим постепенным расширением зазора между ВА и ДО (Рис. 180). Эти нагрузки могут привести к повреждению конструкций, поэтому надежное численное предсказание их амплитудно-частотных характеристик является необходимым пререквизитом создания САС.

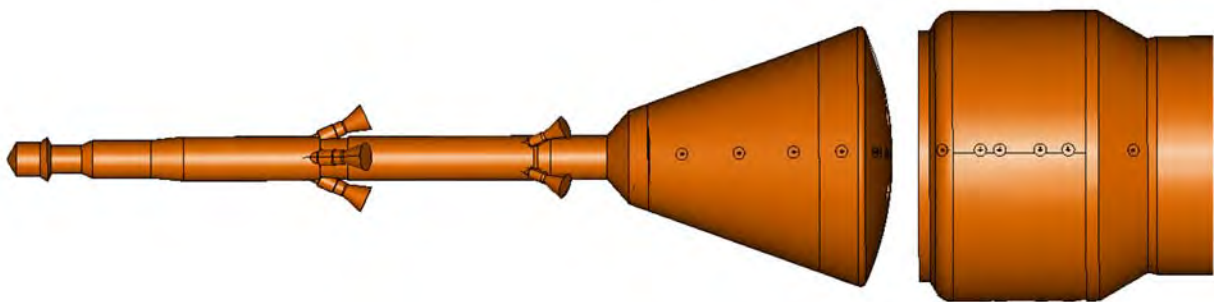


Рис. 180. Модельная геометрия ОГБ и ДО с обтекателем в процессе их разведения.

Численное исследование воздействия струй ОРД и РДЭО на КГЧ было выполнено в работе [336] с использованием комплекса программ FLOWVISION, а исследование процесса разделения ВА и ДО впервые было проведено в настоящей работе.

Течение в зазоре между экранами ВА и ДО имеет сложный характер и согласно [337] при некоторых условиях может иметь автоколебательный характер, что приводит к необходимости

использования для его расчета нестационарных вихререзрешающих подходов. С учетом того, что LES обтекания полной конфигурации ОГБ с ДО и зазором между ними при реальных числах Рейнольдса требует недоступных в настоящее время вычислительных ресурсов, единственный возможный путь решения данной задачи состоит в применении гибридных RANS-LES подходов.

Ниже представлены формулировка такого подхода применительно к рассматриваемому течению и полученные с его помощью результаты, опубликованные совместно с М.Х. Стрельцом, М.Л. Шуром, А.А. Дядькиным и С.П. Рыбаком в работах [338], [339].

Постановка задачи

Поскольку скорость разведения ОГБ и ДО мала, данная задача решалась в квазистационарной постановке. Иными словами, вместо расчета реального течения с непрерывно увеличивающейся шириной зазора $dX(t)$ была выполнена серия расчетов при различных фиксированных значениях этой ширины и числа Маха.

Основное отличие этой задачи от рассмотренного в предыдущем разделе обтекания КГЧ на этапе выведения состоит в формировании в зазоре между ВА и ДО отрывной зоны, ограниченной слоем смешения, оторвавшимся от поверхности экрана ВА. Основная цель проводимых расчетов состояла в определении пульсационных характеристик течения (в первую очередь, пульсаций давления) именно в этой зоне, что диктовало необходимость обеспечения высокой точности ее расчета и определило оптимальный подход к моделированию всего течения в целом, который состоит в следующем.

При решении данной задачи, как и при расчете обтекания КГЧ, применялась двухэтапная процедура (Рис. 181). Используемая на первом (вспомогательном) RANS этапе постановка задачи была практически идентична постановке, описанной в разделе 4.4.2, а именно проводится расчет обтекания РБАС, ВА, ДО с обтекателем и фрагмента РН. Для замыкания уравнений Рейнольдса использовалась полуэмпирическая модель турбулентности Ментера $k-\omega$ SST [56] с предложенной в диссертации (раздел 2.1.3) поправкой на кривизну линий тока и вращение, которая обеспечивает достаточно надежное предсказание характеристик осредненного течения вверх по потоку от кромки экрана ВА, где турбулентный пограничный слой отрывается от его поверхности.

На втором этапе проводился вихререзрешающий расчет течения в ограниченной части потока, включающей только часть ВА, ДО с обтекателем и фрагмент РН (зеленый прямоугольник на Рис. 181). При этом, в отличие от расчета обтекания КГЧ, использовался не IDDES, а DDES в

сочетании с адаптированным к слоям смешения подсеточным линейным масштабом Δ_{SLA} (см. раздел 1.2.1)¹⁸.

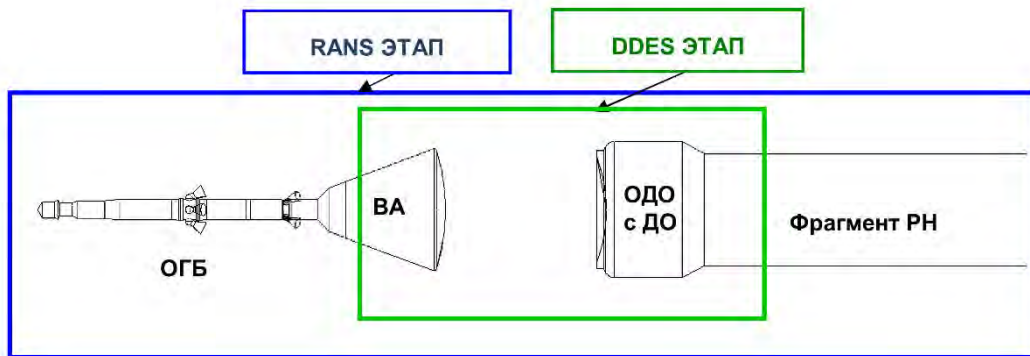


Рис. 181. Схема двухэтапного расчета процесса разведения ОГБ и ОДО.

Как и при расчете КГЧ, расчетная область RANS в плоскости XR имела трапециевидную форму (использование наклонной боковой границы гарантирует, что она всегда является «входом» в расчетную область). Ее размер в продольном направлении составлял около $250 L_0$, а в радиальном – менялся от $240 L_0$ до $280 L_0$ (Рис. 182 слева). Азимутальный размер области был ограничен сегментом $0^\circ < \varphi < 45^\circ$, где плоскости $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ проходили через оси соседних сопел ОРД и РДЭО (на границах этого сегмента использовались условия симметрии). Граничные условия на остальных границах совпадали с условиями, использовавшимися на RANS этапе при расчете обтекания КГЧ на участке выведения (раздел 4.4.2).

Входная граница расчетной области DDES (Рис. 182 справа) располагалась в сечении $x/L_0 = 3$, расположенном вверх по потоку от миделя ВА на расстоянии трех локальных толщин пограничного слоя. Выходная граница DDES располагалась на расстоянии $25 L_0$ вниз по потоку от экрана ДО, а его боковая граница, как и в RANS, была наклонной (ее радиус линейно увеличивался от $35 L_0$ до $47 L_0$). Наконец, в отличие от RANS расчета, DDES проводится в полной (360°) области по азимутальной координате. Необходимость этого связана с тем, что нестационарное турбулентное течение, рассчитываемое на DDES этапе, по определению не обладает какой-либо азимутальной симметрией.

¹⁸ В использовании более сложного метода IDDES в рассматриваемой задаче нет необходимости, поскольку формирование развитых турбулентных структур в зазоре происходит автоматически (при отсутствии на входе в DDES область разрешенной турбулентности) вследствие неустойчивости оторвавшегося от поверхности ВА слоя смешения.

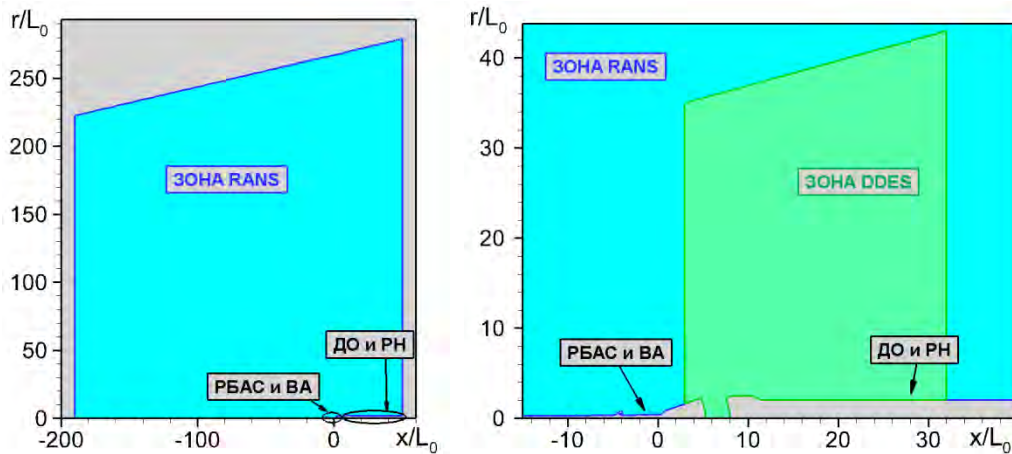


Рис. 182. Конфигурация расчетной области для проведения RANS (слева) и DDES (справа) расчетов.

Граничные условия для DDES расчетов в основном совпадали с условиями, использованными на RANS этапе. Различия сводятся к следующему. На входных границах (сечение $x/L_0 = 3$ вне пограничного слоя и боковая граница) использовались характеристические условия, однако значения инвариантов Римана определялись при этом по локальным параметрам потока на этих границах, найденным в результате первого (RANS) этапа расчета. В пределах пограничного слоя на левой входной границе задавались профили скорости, температуры и турбулентной вязкости, полученные из RANS решения. В том случае, когда эта граница была сверхзвуковой, на ней также задавалось давление из RANS решения, а в противном случае (дозвуковой вход) давление экстраполировалось изнутри расчетной области. Наконец, в азимутальном направлении использовались не условия симметрии, как в RANS, а периодические граничные условия.

Расчетные сетки на RANS этапе были аналогичны сеткам, которые использовались при расчете обтекания КГЧ (раздел 4.4.2). Вначале строилась двумерная базовая сетка в плоскости XU , которая затем реплицировалась по азимутальному углу. Отличие этой сетки от сетки, использованной при расчете КГЧ, состояло лишь в том, что в области зазора между ВА и ДО в ней добавляется блок, имевший сгущение в области слоя смешения, отрывающегося от ВА (см. Рис. 183), что необходимо для его достаточно точного разрешения.

Затем в базовой сетке делались вырезы, в которых размещались дополнительные сеточные блоки для сопел ОРД и РДЭО. Общий размер RANS сетки зависел от величины зазора dX/D ($D = 4.4L_0$ – диаметр миделя ВА) и составлял около 15 миллионов ячеек.

Пример сетки, использованной для DDES, показан на Рис. 184. Процедура построения этой сетки состояла в репликации базовой двумерной сетки в меридиональной плоскости по азимутальному направлению на всю расчетную область (360°). Затем в области зазора между ВА и ДО в полученную таким образом сетку добавлялся декартов блок, расположенный в окрестности оси цилиндрической системы координат (этот блок показан на Рис. 184 красным цветом).

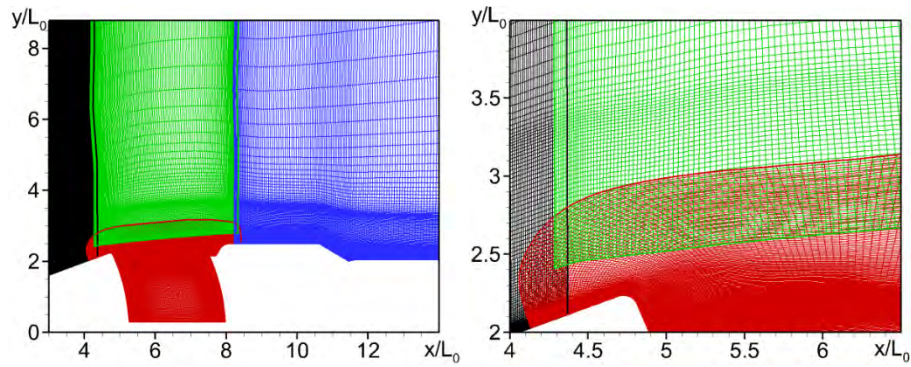


Рис. 183. Пример базовой расчетной сетки для RANS этапа расчета в окрестности зазора между ВА и ДО для расчета при $dX/D = 0.5$.

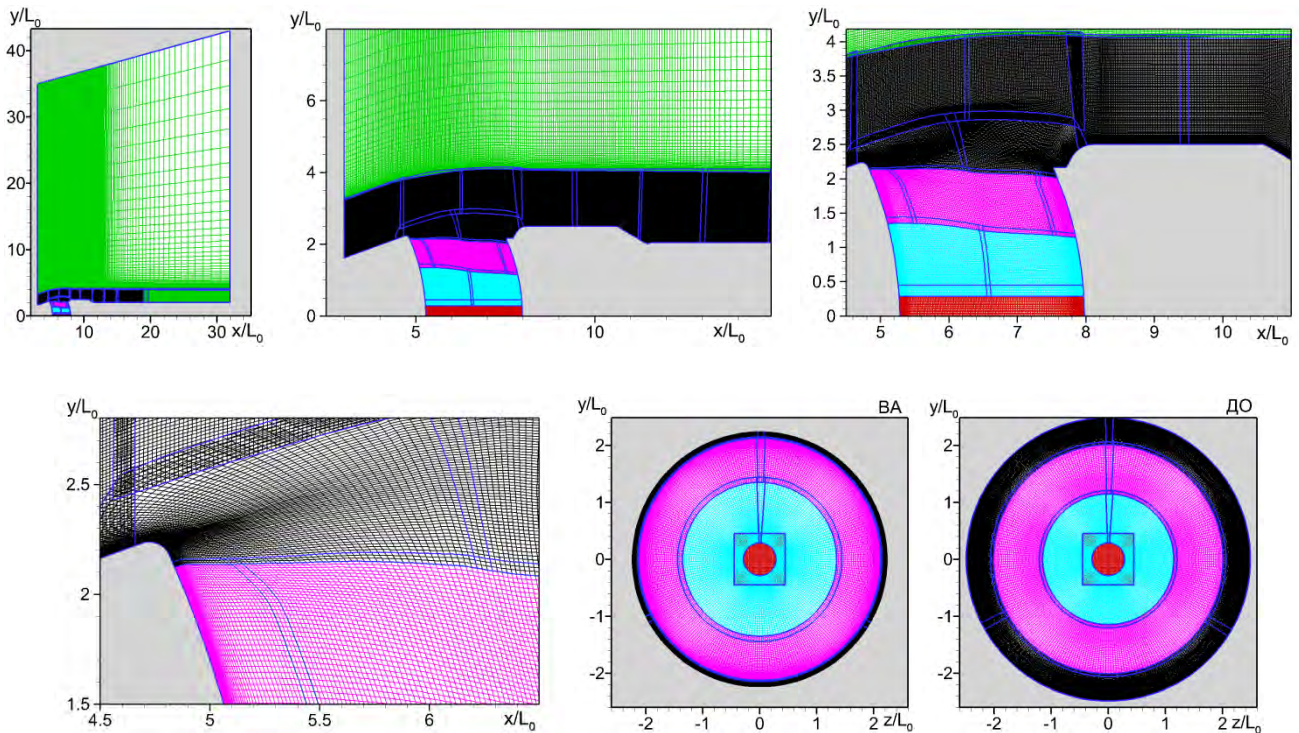


Рис. 184. Пример расчетной сетки для DDES этапа расчета при $dX/D = 0.5$: сетка и ее фрагменты в плоскости XY и сетки на поверхности ВА и ДО.

Требования к размерам шагов сетки в области, где DDES функционирует в режиме LES (вниз по потоку от линии отрыва потока от поверхности ВА), являются гораздо более жесткими, чем требования к шагам RANS сетки. В частности, ячейки этой сетки были близки к изотропным, а ее шаги должны обеспечивать разрешение вихревых структур с масштабами, соответствующими инерционному интервалу спектра турбулентности. Кроме того, необходимо дополнительное по сравнению с RANS сгущение сетки в окрестности оторвавшегося от поверхности ВА слоя смешения.

Величина характерного шага сетки во всей LES области, равная примерно $0.04 L_0$, была выбрана на основе имеющегося опыта расчета слоев смешения и отрывных течений. Это определило шаг сетки по азимутальному углу в области слоя смешения: $\Delta\varphi \approx 1^\circ$. Однако при

приближении к оси ВА с фиксированным шагом по азимутальному углу $\Delta\varphi$, линейный шаг сетки в азимутальном направлении уменьшается пропорционально локальному радиусу, что позволяет увеличивать $\Delta\varphi$ при приближении к оси без снижения точности расчета. Это достигается путем разбиения блока сетки в зазоре между ВА и ДО на несколько блоков с различным количеством узлов в азимутальном направлении. В частности, в блоках, показанных на Рис. 184 фиолетовым цветом, количество ячеек сетки в азимутальном направлении уменьшено в 2 раза по сравнению с «черными» блоками, а в блоках, показанных голубым цветом – еще на треть. Кроме того, заметная экономия узлов DDES сетки в азимутальном направлении достигается путем ее закругления в блоках, расположенных во внешней (невязкой) области потока (в 4 раза) и вниз по потоку от обтекателя ДО (в 2 раза), где нет необходимости в разрешении пульсаций давления («зеленые» блоки на Рис. 184).

Отметим, наконец, что для того, чтобы повысить эффективность параллелизации алгоритма, блоки сетки дополнительно искусственно разбивались таким образом, чтобы в окончательной сетке все блоки имели примерно одинаковый размер, составлявший от 0.5 до 1 миллиона узлов в зависимости от варианта. В зависимости от размера зазора между экраном ВА и обтекателем ДО dX/D размер сетки DDES составлял от 27 до 34 миллионов узлов, а общее количество блоков изменялось от 42 до 56.

Шаг интегрирования по времени в DDES расчетах полагался равным $\Delta t = 0.01 L_0/U_\infty$, что обеспечивало выполнение условия $CFL < 1$ (CFL – число Куранта) во всей расчетной области, за исключением близких к стенке ячеек в присоединенных пограничных слоях. При этом в качестве начальных условий использовались соответствующие стационарные RANS решения, полученные на первом этапе, и расчет проводился в течение 500 конвективных времен, L_0/U_∞ , т.е., в течение примерно 17 времен проноса потока через расчетную область. Этот временной интервал включал переходный период с протяженностью около 150 конвективных времен, который необходим для достижения статистически установившегося течения¹⁹, и “рабочий” период около 350 конвективных времен (12 времен проноса), в течение которого накапливалась нестационарная информация, необходимая для статистической и спектральной обработки полученных результатов. Отметим, что приведенные значения шага интегрирования по времени и протяженности рабочего интервала обеспечивали надежное предсказание спектров давления в диапазоне чисел Струхала $Sh_D = fD/U_\infty$ от 0.15 до 300.

¹⁹ Столь большое время выхода решения на статистически установившийся режим (оно существенно превышает время проноса возмущений через расчетную область) необходимо для установления течения в обширной застойной зоне между экранами ВА и ДО.

Валидация метода расчета

Для валидации разработанной методологии было проведено сопоставление полученных с ее помощью результатов с экспериментальными данными, полученными при испытаниях модели ПКК масштабом 1/70 при транс- и сверхзвуковых числах Маха в аэродинамической трубе У-3М ЦНИИМАШ. Число Рейнольдса в экспериментах, построенное по $L_0=1/70$ м, составляло $3.2 \cdot 10^5$, то есть было примерно в 30 раз меньше, чем при полетных условиях.

В экспериментах проводились измерения нестационарного давления на поверхностях экрана ВА и обтекателя ДО в процессе их разделения с помощью датчиков абсолютного давления (погрешность измерений от верхнего предела составляла $\pm 0.2\%$). Они показали, что максимальная амплитуда нестационарных нагрузок на эти поверхности ВА и обтекателя ДО наблюдается на начальной стадии разведения ($dX/D = 0.5$) при трансзвуковых режимах полета ($0.8 \leq M_\infty \leq 0.9$). Для этих режимов в спектрах давления наблюдались пики при числах Струхалия, построенных по ширине зазора dX , $Sh_{dX} = f dX / U_\infty = 0.75n$ ($n = 1, 2, 3$ – номер гармоники), что свидетельствует о развитии в зазоре автоколебаний (резонанса) акустической природы [337]. При этом амплитуда пика, соответствующего первой моде, достигает на поверхности обтекателя ДО ≈ 170 дБ. Таким образом, именно эти условия представляют наибольший практический интерес, с одной стороны, и являются наиболее сложными с точки зрения численного моделирования, с другой. В связи с этим именно они были выбраны для оценки адекватности используемых моделей и точности разработанной вычислительной методологии.

Примеры сравнения расчетных и экспериментальных спектров пульсаций давления на поверхностях экрана ВА (слева) и обтекателя ДО (справа) при двух трансзвуковых значениях числа Маха и $dX/D = 0.5$ представлены в Табл. 4 и на Рис. 185. Из них видно, что при обоих значениях числа Маха расчетные и экспериментальные значения числа Струхалия, соответствующие основным пикам в спектрах, хорошо согласуются между собой. То же относится к амплитудам основного пика и к уровню широкополосной части спектров. В то же время, между некоторыми другими деталями расчетных и экспериментальных спектров имеются существенные различия. В частности, в расчетных спектрах отсутствует наблюдаемый в эксперименте «размазанный» пик сравнительно низкой амплитуды при числе Струхалия $Sh_{dX} \approx 0.35$, который, как показывает анализ, соответствует первой моде автоколебаний, имеющих гидродинамическую природу [337]. Кроме того, при $M_\infty = 0.9$ в расчетных спектрах давления на поверхности обтекателя ДО существенно завышена амплитуда пиков, соответствующих старшим ($n = 2, 3$) модам акустических автоколебаний.

Табл. 4. Сравнение расчетных и экспериментальных частот и амплитуд основного пика спектров давления

| Число Маха | Число Струхала Sh_{dx} основного пика | | Амплитуда основного пика, дБ | | |
|------------|---|--------------|------------------------------|-------------|--------------|
| | Эксперимент | Расчет | ВА/ДО | Эксперимент | Расчет |
| 0.8 | 0.775 | 0.75 (-3.3%) | ВА | 151.7 | 150.5 (-1.2) |
| | | | ДО | 159.6 | 155.7 (-3.9) |
| 0.9 | 0.72 | 0.73 (+1.4%) | ВА | 164.3 | 165.0 (+0.7) |
| | | | ДО | 169.0 | 172.9 (+3.9) |

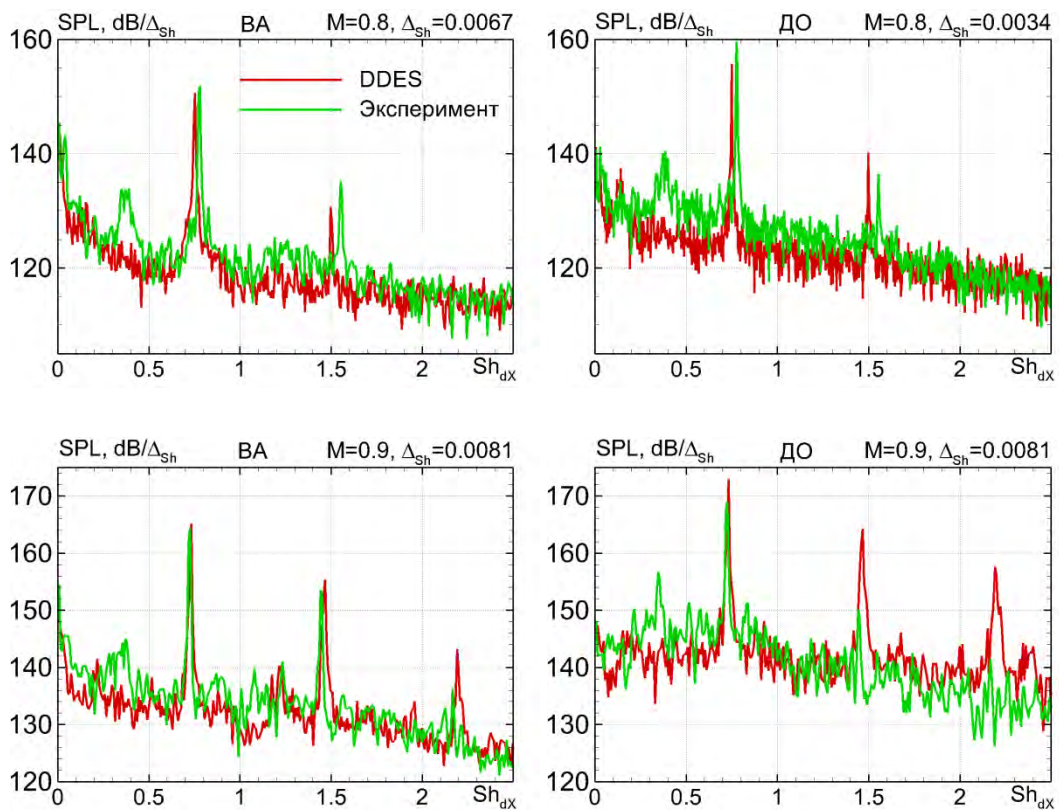


Рис. 185. Сравнение расчетных и экспериментальных узкополосных спектров давления на поверхности ВА (слева) и обтекателя ДО (справа) в точке $r/L_0 = 1.5$ при $dX/D = 0.5$ и числах Маха 0.8 и 0.9.

Тем не менее, учитывая, что расчетные пиковые нагрузки и широкополосные части спектров, представляющие основной практический интерес, хорошо согласуются с результатами измерений, можно заключить, что разработанная методология является достаточно точной и может применяться для оценки динамических нагрузок на ВА и ДО в процессе экстренного отделения ОГБ.

Результаты расчетов

Для всех рассмотренных режимов процесса разведения ОГБ и ДО метод DDES в сочетании с адаптированным к слоям смешения подсеточным масштабом Δ_{SLA} обеспечивает быстрое формирование развитых трехмерных вихревых структур в слое смешения, срывающемся с кромки ВА при отделении ОГБ от РН, и разрешение мелкомасштабной турбулентности в зазоре между экраном ВА и обтекателем ДО. Это наглядно иллюстрируют примеры визуализаций мгновенных картин течения в зазоре, представленные на Рис. 186. Несмотря на хаотичность этих картин, осредненные поля этих газодинамических параметров потока и поля статистических характеристик турбулентности в зазоре являются достаточно гладкими (Рис. 187 - Рис. 190), что достигается благодаря использованию для осреднения большого временного интервала (не менее 350 характерных конвективных времен L_0/U_∞).

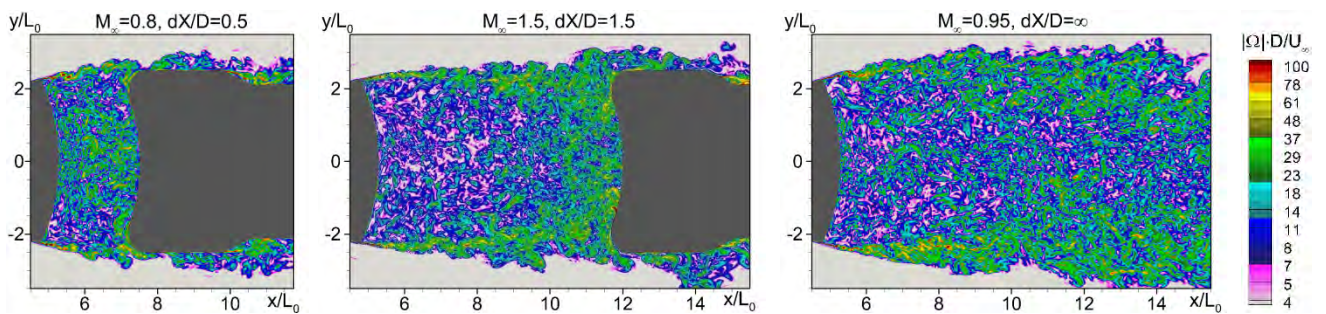


Рис. 186. Мгновенные поля модуля завихренности в меридиональной плоскости XY из DDES-расчетов при различных значениях числа Маха полета и параметра dx/D .

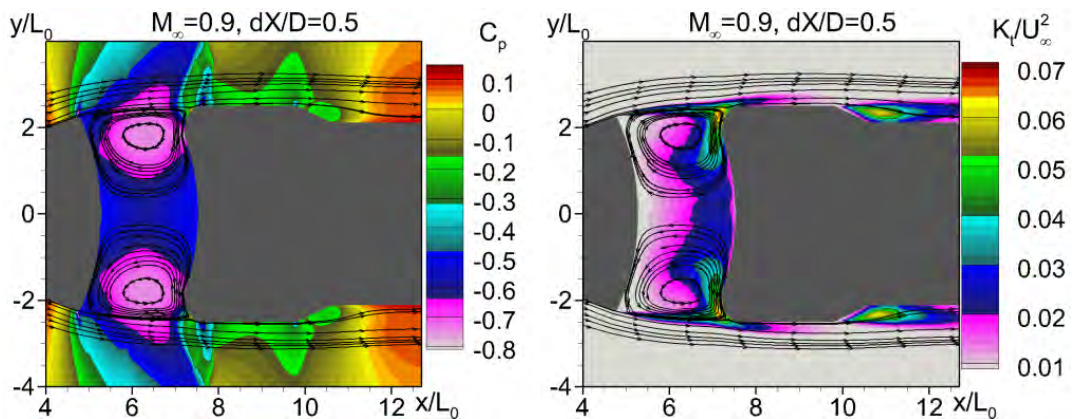


Рис. 187. Осредненные по времени линии тока и поля давления и разрешенной кинетической энергии турбулентности в меридиональной плоскости XY из DDES-расчета при $M_\infty = 0.9$ и $dx/D = 0.5$.

Вместе с тем, для всех рассмотренных режимов течения, за исключением режимов, соответствующих начальной стадии разведения ($dx/D = 0.5$), не наблюдается азимутальной периодичности осредненного течения в зазоре (см. Рис. 189 и Рис. 190), наличие которой можно было бы ожидать с учетом наличия в рассматриваемой конфигурации восьми эквивалентных в геометрическом смысле секторов размера $\Delta\phi = 45^\circ$.

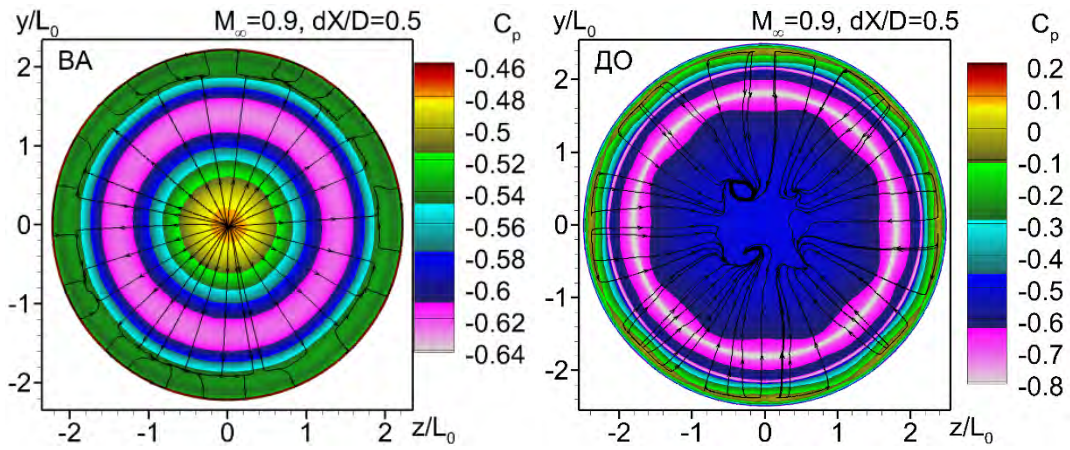


Рис. 188. Осредненные по времени поля давления и линии тока на поверхности экранов ВА и ДО из DDES-расчета при $M_\infty = 0.9$ и $dX/D = 0.5$.

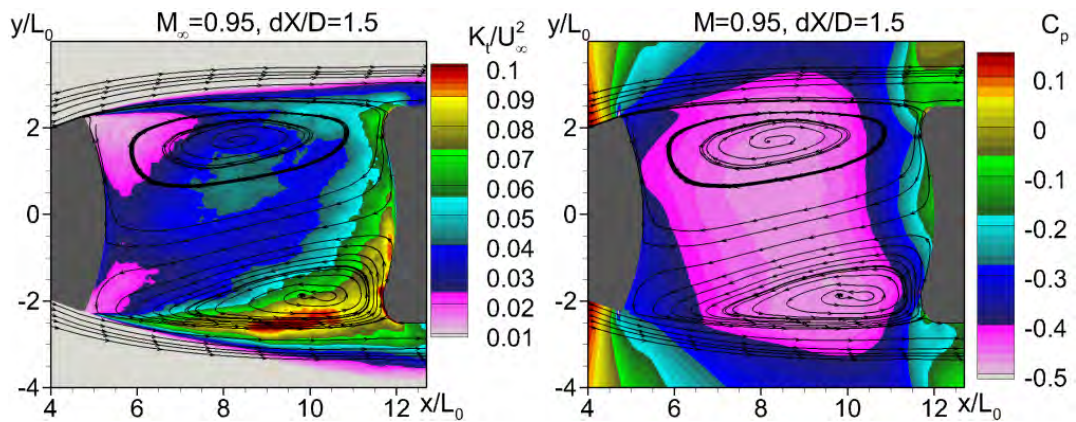


Рис. 189. То же, что на Рис. 187 из DDES-расчета при $M_\infty = 0.95$ и $dX/D = 1.5$.

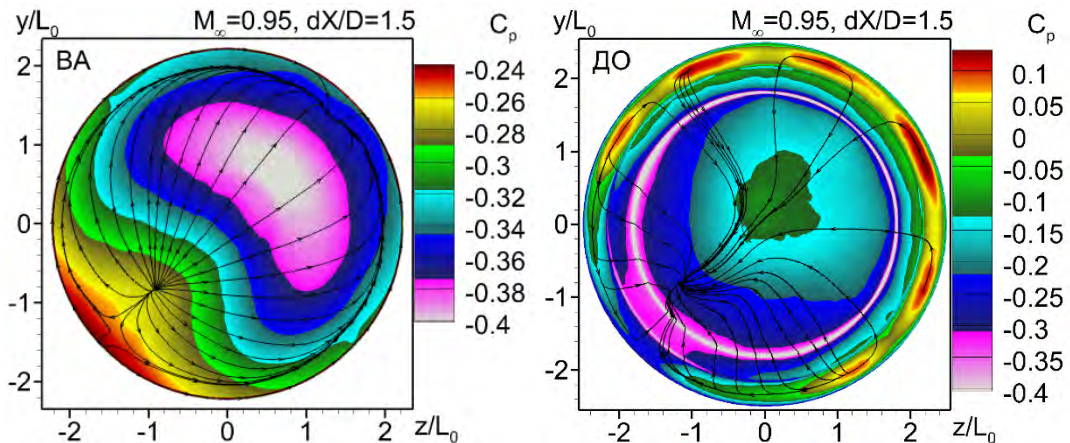


Рис. 190. То же, что на Рис. 188 из DDES-расчета при $M_\infty = 0.95$ и $dX/D = 1.5$.

Возможно, значительное (на порядок или более) увеличение временного интервала осреднения обеспечило бы такую периодичность, однако проведение столь длительных расчетов на практике невозможно из-за чрезвычайно высоких вычислительных затрат. Поэтому, в дополнение к осреднению по времени, было выполнено пространственное осреднение параметров потока по указанным восьми секторам. Полученные таким образом поля газодинамических характеристик потока оказались практически независимыми от азимутального угла, что свидетельствует о

слабом влиянии следов сопел РБАС и РДЭО на осредненное течение в зазоре между ВА и ДО. Однако, пульсационные характеристики этого течения и, в частности, среднеквадратичные пульсации давления, оказываются более чувствительными к азимутальной неоднородности потока, обусловленной следами этих сопел. Это иллюстрирует Рис. 191 на котором показаны поля этих пульсаций на поверхности экрана ДО. Из него видно, что пульсации давления в плоскостях, проходящих через центры следов сопел РБАС и РДЭО (при $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$), на 1-3 дБ ниже, чем пульсации между следами ($15^\circ < \varphi < 30^\circ$).

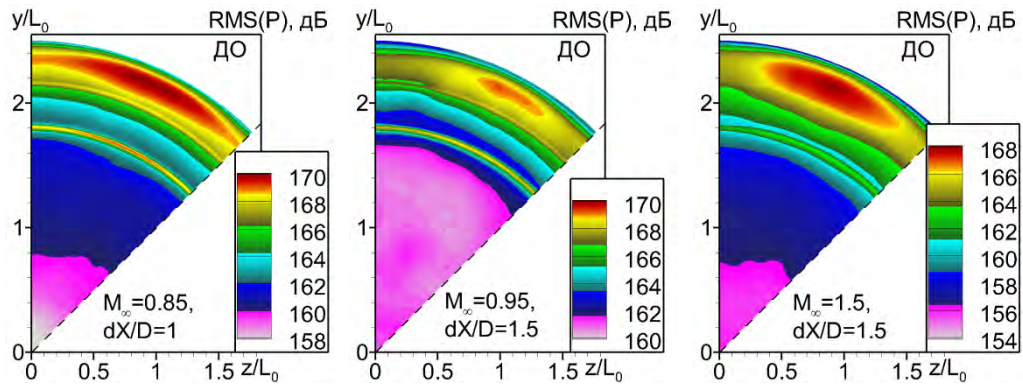


Рис. 191. Примеры полей среднеквадратичных пульсаций давления на поверхности обтекателя ДО из DDES-расчета для нескольких режимов течения.

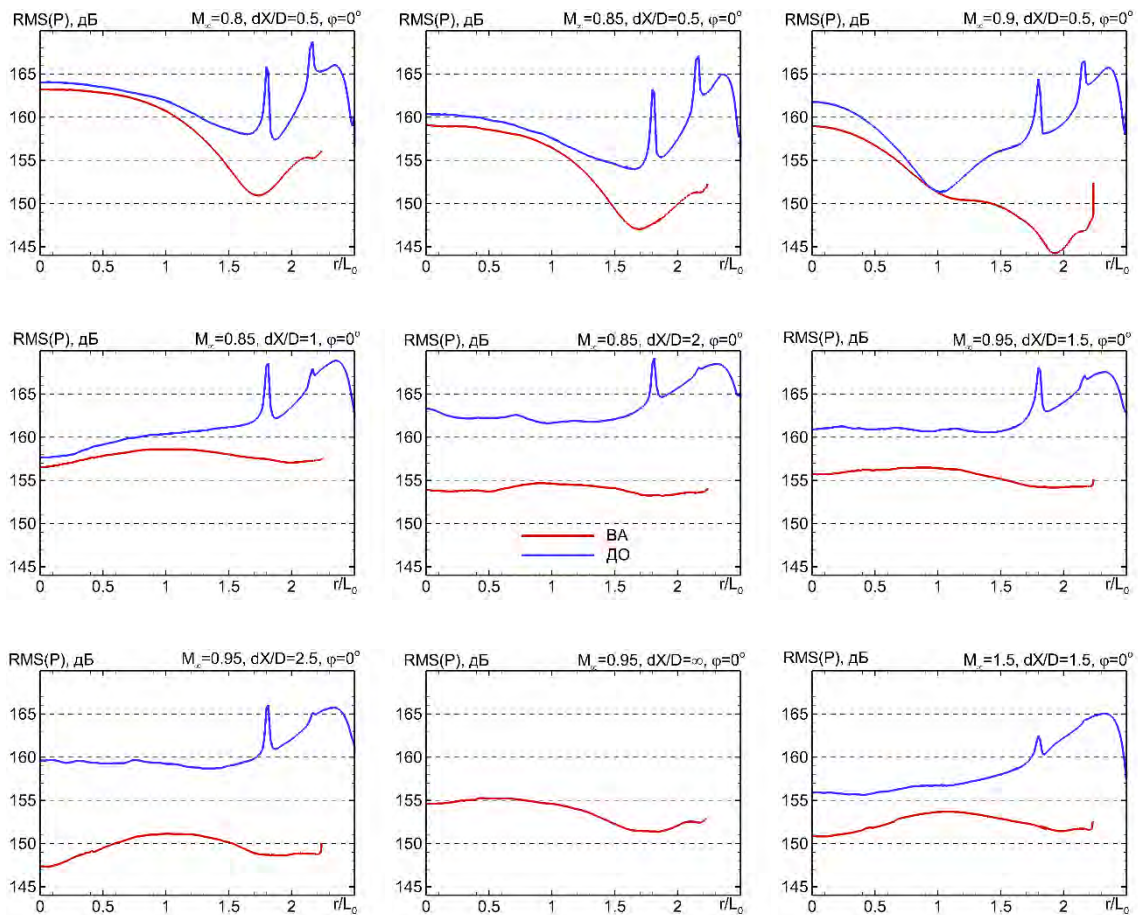


Рис. 192. Радиальные распределения среднеквадратичных пульсаций давления на поверхности экранов ВА (красные кривые) и ДО (синие кривые).

На Рис. 192 приведены радиальные распределения среднеквадратичных пульсаций давления на поверхностях экрана ВА и обтекателя ДО. Из него видно, что для всех режимов полета наиболее сильные пульсации наблюдаются на поверхности обтекателя ДО. Соответствующие радиальные распределения являются сильно неравномерными и имеют выраженные максимумы в окрестности кромки обтекателя (при $r/L_0 \approx 2.35$), т.е. в области взаимодействия с ним интенсивных вихревых структур слоя смещения, оторвавшегося при обтекании ВА (см. визуализации течения на Рис. 186). Величины указанных максимумов сравнительно слабо зависят от режима полета и изменяются в диапазоне от 165 до 169 дБ.

Наряду с указанными максимумами, также наблюдаются острые пики в окрестности точек излома контура (при $r/D \approx 1.8$ и $r/D \approx 2.15$), амплитуда которых сравнима с амплитудой максимумов при $r/D \approx 2.35$. Что касается уровня пульсаций давления в центре обтекателя ДО (при $r = 0$), то для большинства режимов он намного (на 5-10 дБ) ниже максимальных значений у кромки экрана (см. средний и нижний ряды на Рис. 192). Исключение составляют лишь трансзвуковые режимы полета при малой ширине зазора между ВА и ДО ($dX/D = 0.5$, верхний ряд на Рис. 192). На этих режимах, как уже отмечалось, в зазоре наблюдается акустический резонанс, в результате чего в центре обтекателя наблюдается максимум пульсаций давления, величина которого лишь на 2-4 дБ ниже амплитуды «основного» пика у кромки обтекателя ДО.

Что касается распределения интенсивности пульсаций давления по экрану ВА, то для режимов полета без акустического резонанса, то есть при $dX/D \geq 1$, они являются почти равномерными, а их уровень на 10-15 дБ ниже максимумов пульсаций на поверхности обтекателя ДО. В «резонансных» же режимах (верхний ряд на Рис. 192) распределения $RMS(p)$ по радиусу экрана ВА, также как и соответствующие распределения по радиусу обтекателя ДО, имеют максимум в центре экрана, причем его величина лишь на 1-3 дБ меньше величины аналогичного максимума в центре обтекателя ДО.

На Рис. 193 и Рис. 194 представлены спектры пульсаций давления на поверхностях экрана ВА и обтекателя ДО для различных режимов течения. Из Рис. 193 видно, что для нерезонансных режимов, имеющих место на более поздних стадиях разделения ОГБ и РН ($dX/D \geq 1.0$), эти спектры являются широкополосными (Рис. 193) и имеют максимальный уровень в области низких частот. Это, по-видимому, связано с глобальными азимутальными колебаниями потока в следе ВА (вероятно именно этими низкочастотными колебаниями объясняется отсутствие осевой симметрии осредненных по времени полей параметров потока при используемых временных интервалах осреднения). При этом, как уже отмечалось ранее, уровень пульсаций давления на обтекателе ДО примерно на 10 дБ выше, чем на экране ВА.

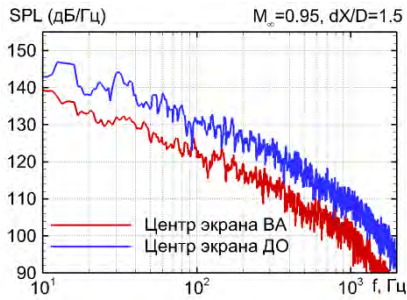


Рис. 193. Пример спектра пульсаций давления для нерезонансного режима.

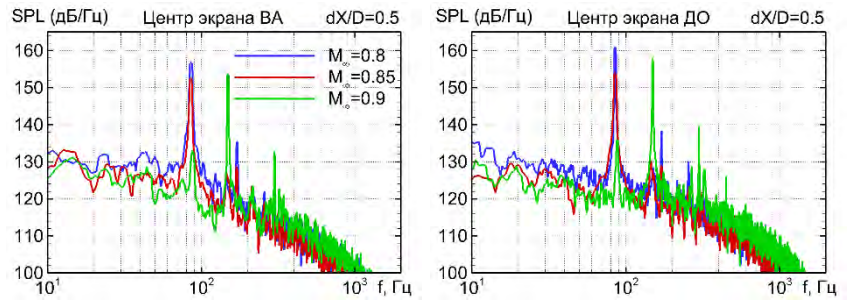


Рис. 194. Спектры пульсаций давления в центрах экранов ВА (слева) и ДО (справа) для резонансных режимов.

Характерной особенностью спектров резонансных режимов (Рис. 194), наблюдаемых при малой ширине зазора между ВА и ДО ($dX/D = 0.5$), является наличие ярко выраженных тонов, амплитуда которых более чем на 30 дБ превышает уровень широкополосного сигнала. Частоты этих тонов соответствуют частотам первых двух или трех мод стоячих акустических волн в зазоре между ВА и ДО, а частота доминирующего тона зависит от числа Маха полета. Так, при $M_\infty = 0.8$ и $M_\infty = 0.85$ доминирует первая мода с частотой около 80 Гц, а при $M_\infty = 0.9$ – вторая мода с частотой около 160 Гц. Различие структуры стоячих волн отчетливо видно из Рис. 195, на котором для трех резонансных режимов представлены поля интенсивности пульсаций давления в зазоре между ВА и ДО для третьоктавных диапазонов частот, содержащих частоты доминирующих тонов.

Таким образом, при трансзвуковых режимах полета модальный состав сигнала и его интенсивность оказываются очень чувствительными к числу Маха. Это обстоятельство, следует учитывать при анализе экспериментальных данных, полученных в аэродинамических трубах, где крайне трудно обеспечить точное воспроизведение параметров внешнего потока, соответствующих условиям свободного полета.

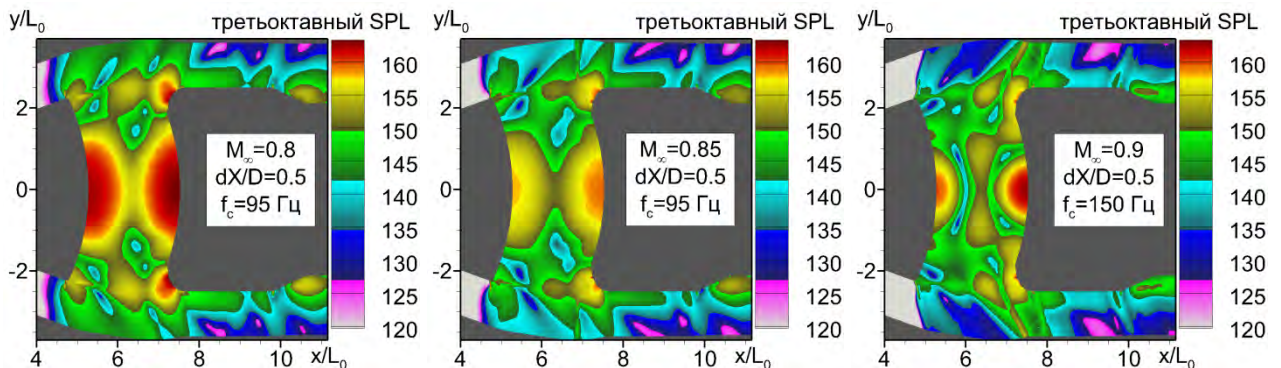


Рис. 195. Поля интенсивности пульсаций давления в плоскости XY для третьоктавных полос, содержащих частоты доминирующих тонов для трех резонансных режимов.

Основные выводы, которые можно сделать на основе проведенных исследований, состоят в следующем.

Разработанная двухстадийная расчетная методология обеспечивает достаточно точное предсказание характеристик турбулентности и нестационарных нагрузок на элементы пилотируемого космического аппарата в процессе аварийного отделения ОГБ.

Максимальные нестационарные нагрузки в процессе отделения ОГБ достигают примерно 170 дБ и наблюдаются в окрестности кромки обтекателя ДО, с которой взаимодействуют турбулентные структуры, населяющие сдвиговый слой, сходящий с кромки экрана ВА.

При трансзвуковых скоростях полета на начальной стадии отделения ОГБ в зазоре, образуемом между ВА и ДО, возникают автоколебания акустической природы. Они приводят к появлению в спектрах пульсаций давления выраженных пиков с частотами, отвечающими первой и второй модам акустического резонанса, и именно эти пики являются ответственными за наблюдаемые высокие (160-165 дБ) акустические нагрузки на поверхности экрана ВА.

4.5. ТРАНСЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ВЫПУКЛОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Обтекание трансзвуковым потоком тел различной формы во многих случаях характеризуется образованием сверхзвуковых областей, замыкающихся скачком уплотнения. Взаимодействие этого скачка с турбулентным пограничным слоем на поверхности тела может приводить к отрыву потока (*Shock Induced Separation – SIS*). Именно такая картина течения наблюдается при обтекании пассажирских авиалайнеров на крейсерском режиме полета ($M_\infty = 0.65 - 0.9$). Кроме того, данное явление имеет непосредственное отношение к так называемому трансзвуковому бафтингу крыла, подробно рассмотренному в разделе 5.3.3. В связи с этим, изучение механизма взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем и точное предсказание характеристик данного процесса представляет как большой теоретический интерес, так и важное практическое значение для авиационной техники.

Одно из наиболее полных экспериментальных исследований данного явления было выполнено в NASA [340]. В нем рассматривалось трансзвуковое продольное обтекание цилиндра с осесимметричным утолщением (см. Рис. 196 и Табл. 5) при числах Рейнольдса и Маха, построенных по характерным масштабам U_∞ (скорость набегающего потока) и c (длина осесимметричного утолщения), равным $6.7 \cdot 10^6$ и 0.875, соответственно. Эксперименты проводились в двух различных аэродинамических трубах (2×2 и 6×6 футов), при этом были выполнены измерения различных характеристик осредненного течения и визуализация потока (Рис. 196).

Результаты этих измерений на протяжении многих лет служили основой для валидации и калибровки RANS моделей турбулентности. Однако экспериментальные данные являются весьма ограниченными. В связи с этим чрезвычайно важным представляется проведение высокоточных и высокоинформативных расчетов данного

течения с помощью вихререзающих подходов, результаты которых позволили бы значительно расширить экспериментальную базу данных. Эта задача является исключительно сложной, так как для получения ее численного решения требуется одновременно обеспечить разрешение мелкомасштабной турбулентности, наличие которой обусловлено высоким значением числа Рейнольдса в эксперименте, и скачка уплотнения, формирующегося в потоке. Все это требует огромных вычислительных ресурсов. В данной работе впервые выполнен комплекс таких расчетов на основе двух зонных вихререзающих подходов: RANS-IDDES и RANS-DNS-IDDES.

Табл. 5. Геометрические параметры экспериментальной установки.

| | |
|----------------------------------|----------|
| Толщина выпуклости | 1.91 см |
| Длина выпуклости | 20.32 см |
| Радиус цилиндра | 7.6 см |
| Длина цилиндра перед выпуклостью | 61 см |
| Длина цилиндра после выпуклости | 28.73 см |

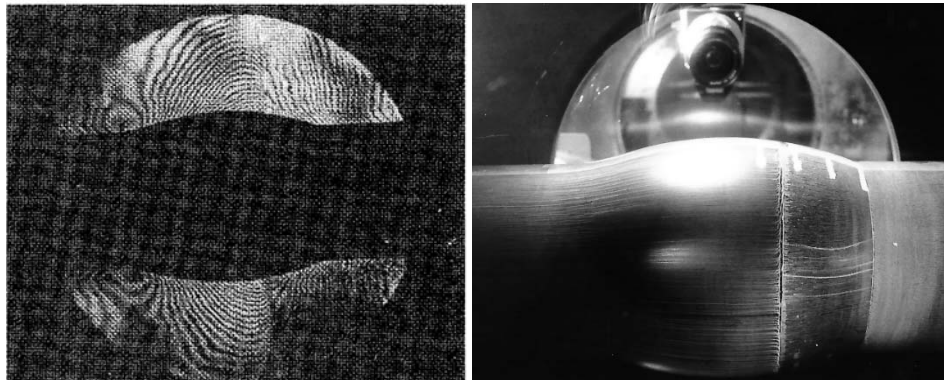
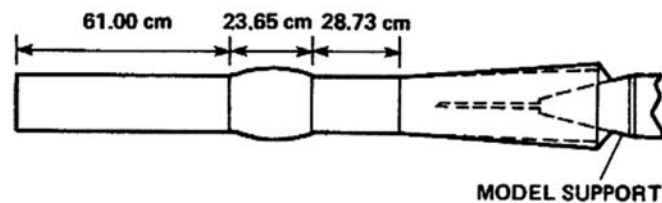


Рис. 196. Схема экспериментальной установки [340] и экспериментальные визуализации течения с помощью голографической интерферометрии (слева) и методом масляной пленки (справа).

Представленные ниже результаты опубликованы в соавторстве с К.В. Беляевым, М.Х. Стрельцом, М.Л. Шуром и Ф. Спалартом в работах [17], [341], [342].

Постановка задачи

Постановка задачи соответствовала условиям эксперимента [340]. Как отмечалось, расчеты были выполнены с помощью RANS-IDDES и RANS-DNS-IDDES подходов. Первый из них базируется на разбиении расчетной области на две зоны, а последний на три (см. Рис. 197). Заметим, что первоначально предполагалось проведение второго расчета с использованием только двух зон (RANS-DNS), однако это оказалось невозможным из-за недостаточных вычислительных ресурсов. Полученные при этом результаты сравнивались между собой и с экспериментальными данными, что позволило получить объективную оценку их точности.

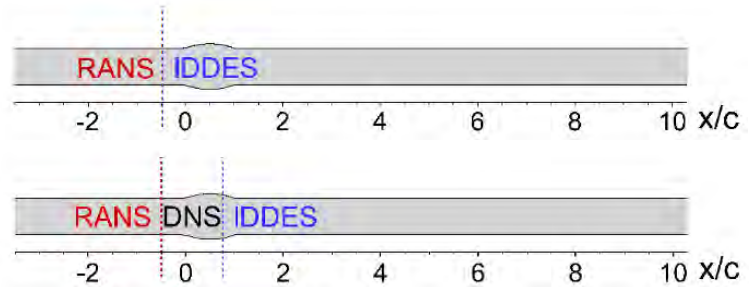


Рис. 197. Схема расчета двухстадийным зонным IDDES и DNS-IDDES.

Оба расчета выполнялись с использованием двухэтапной процедуры. На первом этапе проводился расчет всего течения в рамках уравнений Рейнольдса с использованием модели турбулентности $k-\omega$ SST, которая является одной из немногих (если не единственной) RANS моделей, обеспечивающих приемлемую точность расчета рассматриваемого течения. Расчетная область, используемая на этом этапе, представляла собой прямоугольник с размером $23c \times 10c$ (Рис. 198). При этом, для обеспечения совпадения расчетной толщины пограничного слоя с известной из эксперимента толщиной пограничного слоя на поверхности цилиндра в сечении $x/c = -0.25$, вверх по потоку от него (при $x/c < 3$) к нему добавлялась цилиндрическая поверхность, на которой задавались условия свободного скольжения.

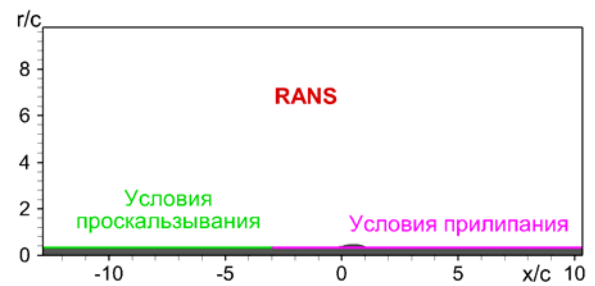


Рис. 198. Расчетная область для RANS этапа расчета.

На проницаемых границах расчетной области использовались характеристические граничные условия [303], сформулированные относительно инвариантов Римана, рассчитываемых по параметрам набегающего потока. При этом левая граница расчетной области считалась «входом», а верхняя и правая – «выходом».

На втором (вихреразрешающем) этапе расчета входная граница расчетной области располагалась в сечении $x/c = -0.5$, а остальные границы совпадали с границами области на первом этапе. При этом для предотвращения отражения возмущений давления от проницаемых границ в их окрестности использовались так называемые поглощающие слои [304] с толщиной $2c$. Внутри

этих слоев на каждом шаге интегрирования по времени полученное поле давления «взвешивалось» с полем давления, полученным на первом (RANS) этапе расчета.

В случае использования на втором этапе DNS-IDDES подхода, DNS подобласть располагалась при $-0.5 < x/c < 0.75$, а ниже по потоку использовался IDDES. Такой выбор положения границ DNS был продиктован стремлением обеспечить максимально возможную точность расчета в наиболее сложной части потока, где непосредственно происходит взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем и его отрыв от выпуклости.

Выбор размера расчетной области в азимутальном направлении при использовании IDDES ($\Delta\varphi = 60^\circ$) был сделан на основе серии предварительных IDDES расчетов на относительно грубой сетке с использованием различных размеров области в этом направлении. Однако проведение DNS-IDDES в такой области потребовало бы чрезмерных (недоступных) вычислительных ресурсов. В связи с этим, а также учитывая то обстоятельство, что в этом случае основной интерес представляет DNS подобласть ($-0.5 < x/c < 0.75$), DNS-IDDES расчет был выполнен в секторе размером $\Delta\varphi = 15^\circ$. Обоснованность этого выбора подтверждается графиками пространственных двухточечных корреляций скорости из серии предварительных IDDES расчетов при различных $\Delta\varphi$ (см. Рис. 199).

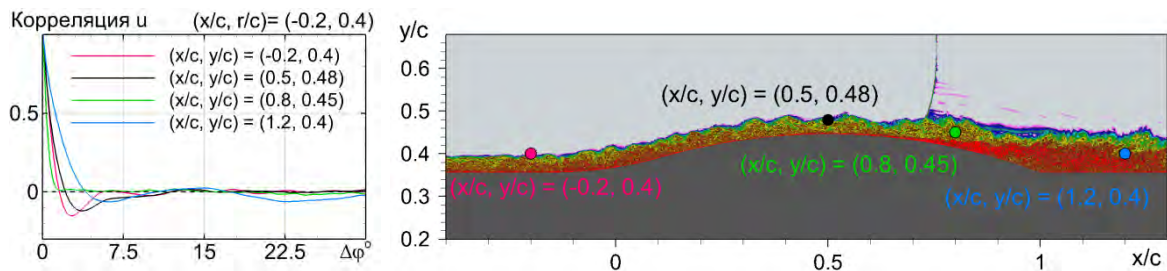


Рис. 199. Графики пространственных двухточечных корреляций скорости в различных точках пограничного слоя, показанных на правом рисунке.

На входной границе расчетной области задавались профили скорости, известные из RANS расчета на первом этапе, с наложенными на них пульсациями скорости, полученными с использованием NTS STG [180], и профили температуры, а подсеточная вязкость рассчитывалась с использованием модели Смагоринского. На остальных границах граничные условия совпадали с описанными выше условиями на RANS этапе расчета.

Остановимся, наконец, на сетках, на которых проводились расчеты. Для IDDES и WMLES расчетов использовались две сетки Grid1 и Grid2, шаги которых по всем направлениям различались в 2 раза. Их основные характеристики представлены на Рис. 200 и в Табл. 6. Видно, что даже шаги грубой сетки Grid1 с большим запасом (не менее чем в 2 раза) удовлетворяют критериям,

предъявляемым к сеткам для WMLES ($\Delta x/\delta \leq 1/10$, $\Delta z/\delta \leq 1/20$) [173]. Размеры сеток Grid 1 и Grid2 составляли 450 миллионов и 1.7 миллиарда узлов, соответственно.

Сетка для DNS-IDDES расчета в DNS подобласти ($-0.5 < x/c < 0.75$) обеспечивала разрешение всех пространственных масштабов турбулентности вплоть до величин порядка линейного колмогоровского масштаба. Шаги этой сетки были примерно в 5-7 раз меньше шагов сетки Grid2 для IDDES (Табл. 6), а ее размер составлял примерно 8.3 миллиарда узлов, что было рекордным для аэродинамических расчетов, выполненных в России и, насколько известно автору, на момент написания диссертации этот рекорд не был превзойден. Это неудивительно, поскольку для проведения такого расчета потребовались все ресурсы суперкомпьютера СКЦ «Политехнический» Торнадо в течение 2 месяцев. Для проведения массивно-параллельных расчетов с использованием гибридной MPI/Open-MP технологии расчетные сетки, описанные выше, были разбиты на блоки примерно одинакового размера (около 10^5 ячеек). Количество блоков сетки составляло от 4096 (IDDES, Grid 1) до 32768 (DNS-IDDES).

Табл. 6. Основные характеристики сеток.

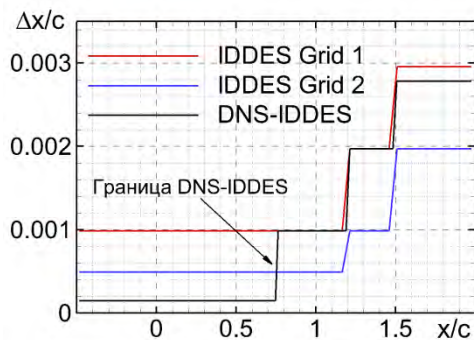


Рис. 200. Зависимость продольного шага сетки от координаты.

| Параметр | IDDES Grid1 | IDDES Grid2 | DNS-IDDES |
|----------------------------|-------------|-------------|-----------|
| $N_x \times N_r$ | 2306x394 | 3970x414 | 9600x860 |
| N_ϕ | 512 | 1024 | 1024 |
| $\Delta x/\delta_0$ | 0.04 | 0.02 | 0.003 |
| Δx^+ | 200 | 100 | 15 |
| $\Delta r_{\max}/\delta_0$ | 0.02 | 0.01 | 0.002 |
| Δr_{\max}^+ | 100 | 50 | 10 |
| $r\Delta\phi/\delta_0$ | 0.02 | 0.01 | 0.002 |
| $(r\Delta\phi)^+$ | 100 | 50 | 10 |

Безразмерные шаги интегрирования по времени $\Delta t \cdot U_\infty/c$ для сеток Grid1, Grid 2 и для сетки DNS-IDDES составляли 10^{-3} , $5 \cdot 10^{-4}$ и $1.25 \cdot 10^{-4}$, соответственно, и обеспечивали выполнение условия CFL < 1 для всех расчетов. Полное время расчета, необходимое для выхода решения на статистически установившийся режим и для накопления данных необходимых для надежного определения статистических характеристик течения составляло примерно $20 c/U_\infty$ для IDDES и $5 c/U_\infty$ для DNS-IDDES. Такое различие связано с тем, что в IDDES подобласть входит отрывная зона, населенная существенно более крупными вихревыми структурами, чем структуры, населяющие присоединенный пограничный слой в DNS подобласти.

Результаты расчетов

Визуализации течения на поверхности обтекаемого цилиндра и в поперечном сечении $x/c = -0.1$, полученные с использованием IDDES на сетках Grid1 и Grid2 и с помощью DNS-IDDES, представлены на Рис. 201 - Рис. 203.

Рис. 201 иллюстрирует качественную эволюцию пристеночных турбулентных структур в процессе ускорения потока вверх по течению от выпуклости, их взаимодействия со скачком уплотнения, отрыва потока от выпуклости и его дальнейшего присоединения к поверхности цилиндра. Кроме того, он наглядно отражает тенденцию к разрешению все более мелких вихрей при переходе от Grid1 к Grid2 в IDDES и от IDDES к DNS. Та же тенденция хорошо видна на Рис. 202, а Рис. 203 дает наглядное представление о пространственной структуре турбулентности в окрестности выпуклости.

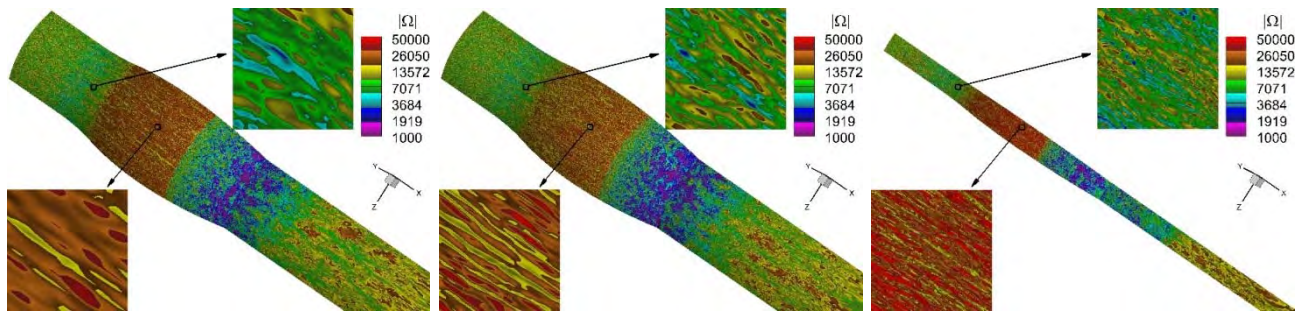


Рис. 201. Мгновенные поля модуля завихренности на обтекаемой поверхности: IDDES Grid1 (слева), IDDES Grid2 (в центре), DNS-IDDES (справа).

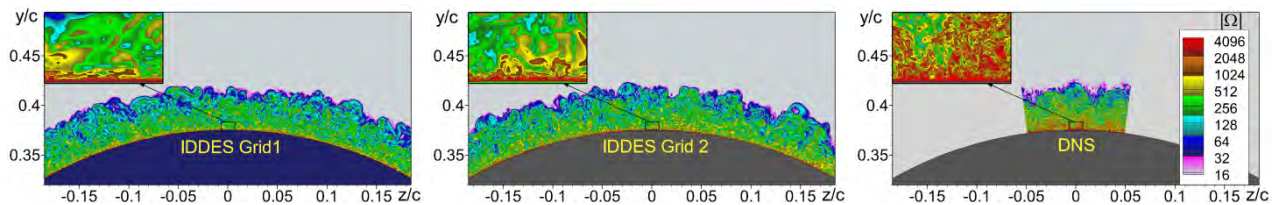


Рис. 202. Мгновенные поля модуля завихренности в сечении $x/c = -0.1$: IDDES Grid1 (слева), IDDES Grid2 (в центре), DNS (справа).

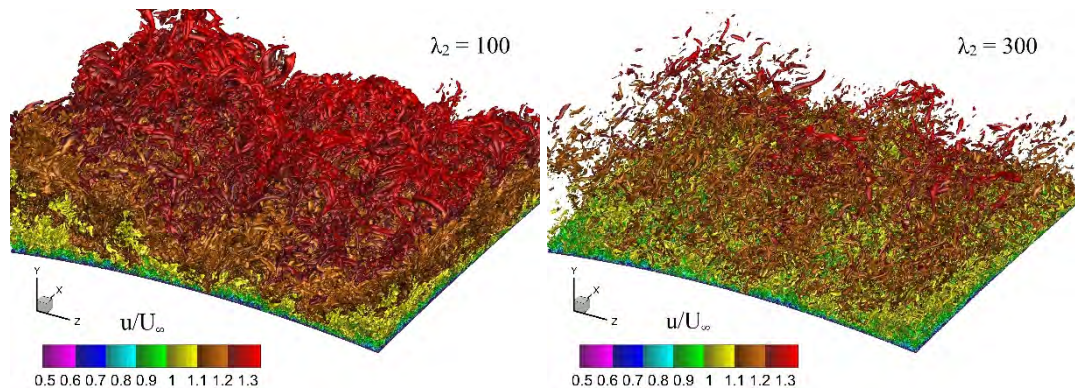


Рис. 203. Две изоповерхности λ_2 критерия, раскрашенные величиной продольной скорости в области $0.44 < x/c < 0.54$ (результаты DNS расчета).

Хорошее разрешение мелкомасштабной турбулентности в пограничном слое методом IDDES подтверждается также спектрами пульсаций продольной компоненты скорости, представленными на Рис. 204: вне зависимости от используемой сетки, в этих спектрах имеется длинный (не менее одного порядка по частоте) инерционный интервал, соответствующий закону « $-5/3$ ».

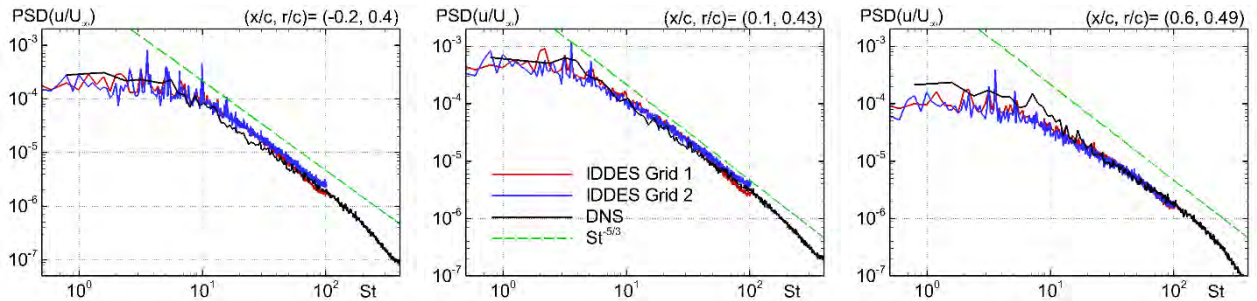


Рис. 204. Спектры продольной компоненты скорости, полученные в различных точках пограничного слоя.

Визуализация области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем (Рис. 205) свидетельствует о формировании в потоке скачка уплотнения с λ -видной ударно-волновой структурой у поверхности выпуклости. Также видно, что согласно DNS-IDDES расчету скачок расположен несколько выше по потоку по сравнению с результатами IDDES.

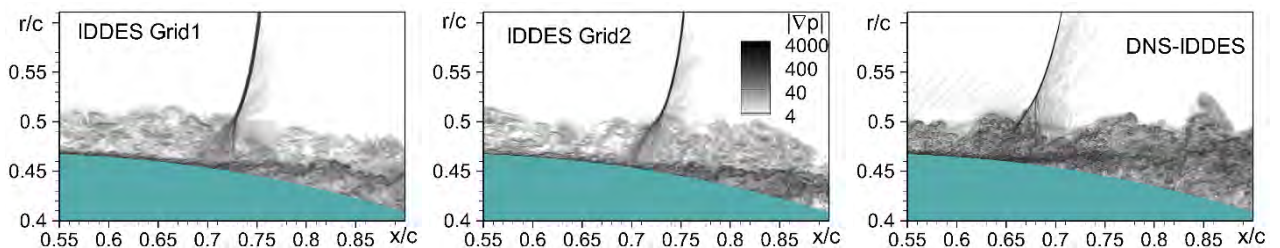


Рис. 205. Мгновенные поля градиента давления в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем.

На Рис. 206 - Рис. 208 представлены основные результаты расчетов осредненных характеристик течения. В частности, на Рис. 206 приведено сравнение распределений коэффициентов давления и трения вдоль обтекаемой поверхности, рассчитанных с использованием IDDES на двух сетках и с помощью DNS-IDDES. Из него следует, что результаты IDDES практически не зависят от используемой сетки, т.е., что даже «грубая» сетка Grid1 достаточна для получения практически сошедшегося по сетке решения. Однако, как положение скачка, так и зависимости коэффициентов трения и давления в отрывной зоне, предсказываемые IDDES, сильно отличаются от экспериментальных данных и от результатов DNS-IDDES, в то время как последние в целом хорошо согласуются между собой. Небольшое отклонение коэффициента давления, рассчитанного с использованием DNS-IDDES, от эксперимента наблюдается лишь в области отрыва,

то есть в IDDES подобласти и связано, по всей видимости, с недостаточным для отрывной зоны размером расчетной области в азимутальном направлении.

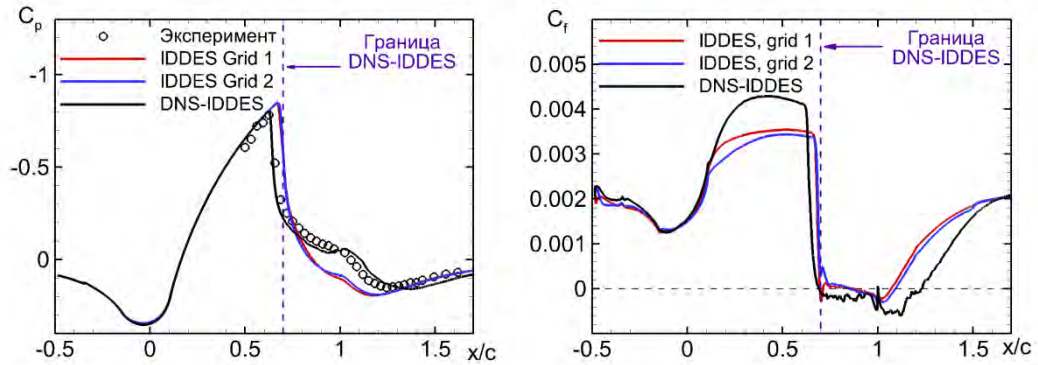


Рис. 206. Продольные распределения коэффициентов давления и трения.

Аналогичные тенденции наблюдаются и в картинах линий тока осредненного течения, показанных на Рис. 207. Из них видно, в частности, что зона отрыва, предсказываемая DNS-IDDES, оказывается значительно более протяженной, чем согласно IDDES расчетам. Заметим также, что размеры отрывной зоны, предсказываемые IDDES расчетами на сетках Grid1 и Grid2, заметно различаются между собой.

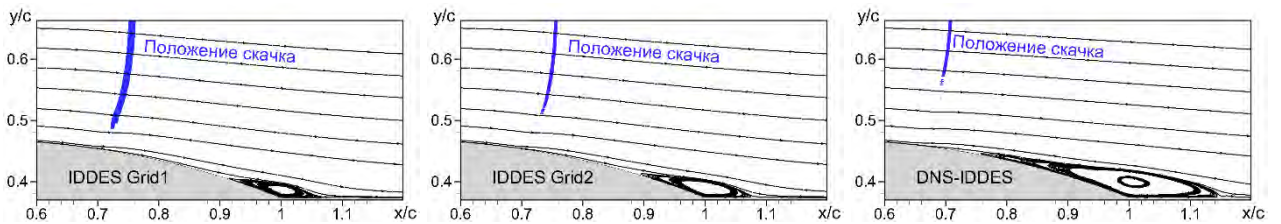


Рис. 207. Линии тока осредненного течения.

Следует отметить, что различие между IDDES и DNS начинается в присоединенном пограничном слое, ускоряющемся под влиянием отрицательного градиента давления на наветренной стороне выпуклости. Это видно, в частности, из Рис. 206, который показывает, что IDDES занижает коэффициент трения, начиная с $x/c = 0.15$. Тот же вывод можно сделать на основе сравнения профилей осредненной продольной скорости, полученных с использованием IDDES и DNS (Рис. 208): эти профили близки в начале области ускорения ($x/c = -0.25$ и 0.1) и сильно различаются в ее конце (при $x/c = 0.5$).

Для выяснения того, являются ли указанные отличия IDDES от DNS следствием применения SST IDDES или они наблюдаются также при использовании других WMLES моделей, были выполнены дополнительные расчеты с использованием двух алгебраических WMLES моделей на сетке Grid1.

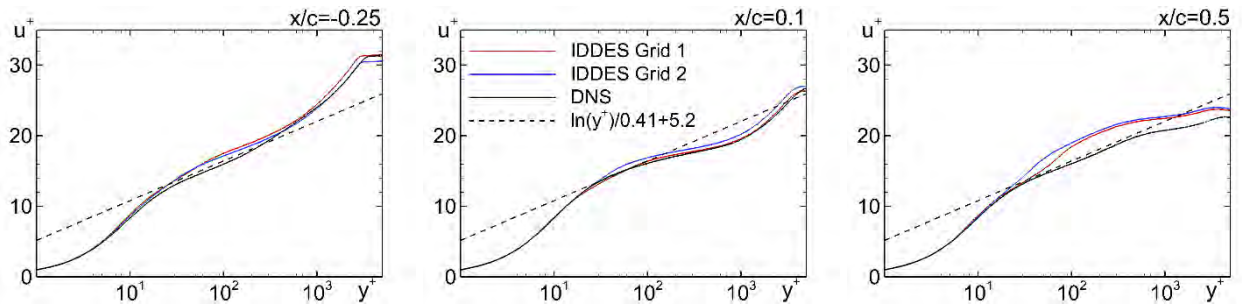


Рис. 208. Профили скорости в переменных закона стенки в различных сечениях зоны с благоприятным градиентом давления.

В рамках этих моделей подсеточная вязкость вычислялась по формуле: $v_t = \left\{ 1 - \exp \left[- \left(y^+ / 25 \right)^3 \right] \right\} \min \left(\kappa d_w, C_s \Delta_{SGS} \right)^2 S$ [173], а подсеточный линейный масштаб Δ_{SGS} определялся либо как корень кубический из объема ячейки сетки (при этом константа Смагоринского C_s полагалась равной 0.1), либо в соответствии с определением линейного подсеточного масштаба IDDES ($\Delta_{SGS} = \Delta_{IDDES}$) с константой Смагоринского 0.2. Ниже эти две версии WMLES обозначаются как WMLES1 и WMLES2, соответственно.

Соответствующие результаты расчетов (Рис. 209) свидетельствуют о том, что выбор подсеточной модели оказывает существенное влияние на распределения коэффициентов давления и трения. Вместе с тем, независимо от используемой модели, результаты WMLES расчетов существенно отличаются от экспериментальных данных.

Таким образом, причины наблюдаемого различия связаны не со специфическими недостатками разработанного SST IDDES подхода, а являются общими для WMLES подходов. Для их выяснения требуются дополнительные исследования.

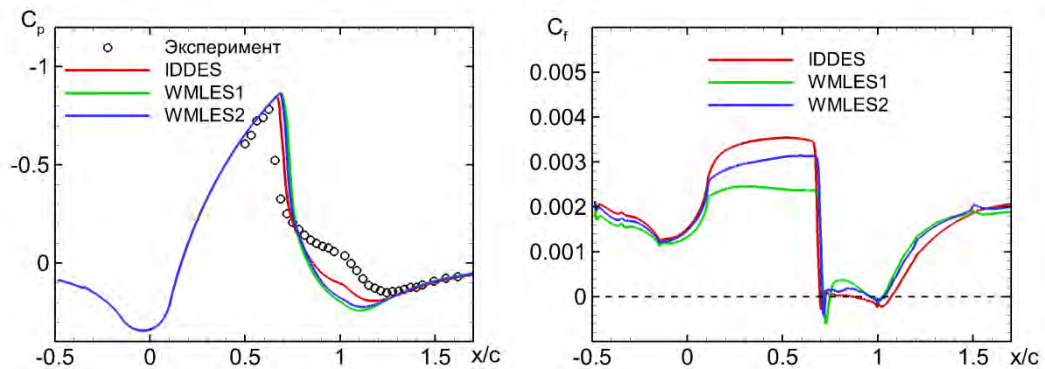


Рис. 209. Сравнение распределений коэффициентов давления и трения, полученных с использованием SST IDDES и двух версий WMLES на сетке Grid1.

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

В данной главе представлены результаты исследований автора в области использования методов линейного анализа для определения устойчивости турбулентных течений.

Математический аппарат линейной теории устойчивости (ЛТУ) является мощным инструментом для анализа устойчивости самых разнообразных механических систем. Применительно к механике жидкости и газа этот подход обычно используется для анализа устойчивости стационарных решений уравнений движения, в роли которых могут выступать как полные уравнения Эйлера, Навье-Стокса или Рейнольдса, так и их более простые формы, такие как уравнения пограничного слоя. Основные этапы линейного анализа устойчивости не зависят от используемых уравнений и состоят в представлении решения нестационарных уравнений в виде суммы стационарного (базового) решения и малых нестационарных возмущений с последующей линеаризацией полученных в результате уравнений относительно возмущений.

Отыскание нетривиального решения полученной в результате системы линейных уравнений для амплитуд возмущений в сочетании с соответствующим образом линеаризованными граничными условиями сводится к решению задачи на собственные значения для линейного дифференциального оператора. Вещественная и мнимая части полученного при решении этой задачи комплексного собственного числа определяют частоту и показатель роста/затухания (в зависимости от знака) собственных колебаний оператора. Таким образом, для ответа на вопрос об устойчивости или неустойчивости стационарного решения достаточно найти собственное число с наибольшим показателем роста. В случае, если он оказывается отрицательным, стационарное решение является устойчивым, а в противном случае – неустойчивым.

Применение линейной теории устойчивости к задачам гидроаэродинамики крайне разнообразно и детальный обзор соответствующих исследований выходит за рамки настоящей диссертации. Тем не менее, представляется полезным кратко остановиться на основных этапах этих исследований и на месте, занимаемом в этих исследованиях работами автора²⁰.

подавляющее большинство исследований, проводившихся с помощью ЛТУ в XX веке, было посвящено определению условий возникновения автоколебаний в ламинарных течениях

²⁰ Более подробный анализ исследований устойчивости ламинарных и турбулентных течений можно найти в обзорах [343], [344] и др.

(см., например, обзор [345]) и определению условий перехода от ламинарной формы течения к турбулентной.

Применение методов ЛТУ к анализу устойчивости турбулентных течений началось в конце 60-х годов прошлого века и было направлено, главным образом, на изучение развития крупномасштабных возмущений в тонких турбулентных сдвиговых слоях. Так, в работах [346] и [347] было получено модифицированное уравнение Орра-Зоммерфельда для случая турбулентного течения, в котором рейнольдсовы напряжения определяются в рамках гипотезы Буссинеска. В них показано, в частности, что квазиламинарный подход, то есть предположение о равенстве нулю турбулентной вязкости, не позволяет корректно описать развитие неустойчивости при течении в канале, в то время как даже весьма грубое допущение о ее постоянстве (о равенстве нулю ее возмущений) существенно улучшает получаемые результаты. Анализ устойчивости турбулентного слоя смещения [348], проведенный в предположении малости вязких слагаемых, привел к существенной недооценке скорости развития возмущений. Аналогичный анализ, проведенный в работе [349] с учетом турбулентной вязкости, позволил получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом. В работах [350] и [351] было получено хорошее согласование результатов линейного анализа с экспериментом в случае расчета турбулентной вязкости с помощью анизотропной алгебраической модели турбулентности.

Таким образом, можно констатировать, что на протяжении XX века анализ устойчивости турбулентных течений проводился лишь с использованием уравнений типа Орра-Зоммерфельда, то есть был ограничен рассмотрением параллельных течений и использованием простейших алгебраических моделей турбулентности без учета возмущений турбулентной вязкости. Анализ устойчивости более сложных, в частности, трехмерных течений, представляющих наибольший практический интерес, был в этот период невозможен из-за недостаточности существующих на тот момент вычислительных ресурсов.

В начале нынешнего века в применении ЛТУ к задачам механики сплошных сред были достигнуты значительные успехи, связанные с быстрым развитием вычислительной техники, разработкой высокоэффективных параллельных алгоритмов [352] и усовершенствованием алгоритмов решения задач на собственные значения [353] - [355]. Кроме того, для решения задач об устойчивости трехмерных течений, однородных в одном из пространственных направлений, был предложен так называемый квазитрехмерный подход (см., например, [356] - [359]).

Все эти достижения открыли возможность применения ЛТУ для решения весьма сложных двумерных и трехмерных задач об устойчивости ламинарных течений. К ним, в частности, относятся задачи о формировании волн Толлмина-Шлихтинга в пограничном слое [360], [361], об устойчивости течений в кавернах и каналах [362], об устойчивости изолированного вихря [363]

и вихревой пары [364]. Значительные успехи были достигнуты в исследовании устойчивости безотрывного и отрывного обтекания таких тел, как лопатка турбины низкого давления [365] - [367], сфероид вращения [368] и крыловой профиль под углом атаки [368], [369]. В частности, с использованием квазитрехмерного подхода было предсказано появление «грибообразных» структур, возникающих при ламинарном обтекании двумерного крыла при режимах близких к срыву потока [112].

Квазитрехмерный подход также может приближенно применяться для определения границ устойчивости течений, характеристики которых слабо изменяются вдоль одного из пространственных направлений (так называемый секционный подход)²¹. В рамках данного подхода вместо проведения полного трехмерного анализа проводится квазитрехмерный анализ устойчивости базового трехмерного решения в ряде сечений, перпендикулярных этому направлению, а оценка устойчивости трехмерного течения делается на основе совокупности результатов анализа устойчивости во всех рассматриваемых сечениях. Примером эффективности такого подхода является анализ устойчивости обтекания цилиндра переменного диаметра, выполненный в работе [370].

Начало применению методов ЛТУ для исследования устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса было положено в совместной работе автора и Дж. Кроуча [371]. В данной работе на этой основе были впервые определены условия начала трансзвукового бафтинга при турбулентном обтекании аэродинамического профиля. Эти исследования получили дальнейшее развитие в цикле работ [372] - [377].

В последние годы аналогичные методы стали применяться анализа устойчивости различных турбулентных течений (турбулентный след [378], обтекание прямых крыльев [113] и др.) в ряде других исследовательских групп.

Наконец, впечатляющие примеры определения условий начала бафтинга для модели пассажирского самолета на основе полного трехмерного анализа устойчивости стационарных уравнений Рейнольдса представлены в недавних работах [379] и [380].

Следует отметить, что результаты линейного анализа устойчивости стационарных решений уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса с точностью до ошибок дискретизации должны совпадать с решениями соответствующих нестационарных уравнений, что позволяет использовать последние для верификации результатов, полученных с помощью ЛТУ²². Для количественного

²¹ Этот подход был предложен автором совместно с Дж. Кроучем в работе [370].

²² Для уравнений Рейнольдса данное утверждение является не точным из-за невозможности полной линеаризации некоторых членов дифференциальных моделей турбулентности, используемых для их замыкания.

анализа нестационарных решений разработаны специальные методы их постпроцессинга (*Proper Orthogonal Decomposition - POD* [381], [382] и *Dynamic Mode Decomposition - DMD* [383] - [385]). Эти методы успешно применяются при решении различных задач, в том числе, задачи об определении границ трансзвукового бафтинга (см., например, [386], [387]). Однако при этом необходимо иметь в виду, что концепция нестационарных уравнений Рейнольдса является обоснованной только при условии, что временной масштаб глобальной нестационарности рассматриваемого течения $T_{нест}$ намного превышает временные масштабы турбулентности $T_{турб}$, поскольку в противном случае осреднение Рейнольдса

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = \int_{t-\Delta T/2}^{t+\Delta T/2} u(\vec{r}, t') dt' / \Delta T, \quad (5.1)$$

где промежуток времени осреднения ΔT удовлетворяет неравенству $T_{нест} \gg \Delta T \gg T_{турб}$, не может быть выполнено корректно. Кроме того, значительная доля «ответственности» за точность полученных результатов лежит на используемой модели турбулентности, поскольку от нее зависит точность как базового решения, так и решения нестационарных уравнений, причем требования к модели в этих двух случаях могут не совпадать.

Данная глава построена следующим образом. Раздел 5.1 посвящен выводу общих уравнений для анализа устойчивости трехмерных сжимаемых турбулентных течений, раздел 5.2 содержит описание предложенного численного метода, а раздел 5.3 – результаты верификации и тестирования разработанного математического обеспечения и его применения для предсказания начала трансзвукового бафтинга.

Предлагаемый подход был разработан совместно с Дж. Кроучем и Д.Р. Магидовым (основные результаты по этой теме опубликованы в работах [370] - [377]).

5.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ АНАЛИЗА ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ СЖИМАЕМЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В данном разделе приведены постановки задач об устойчивости турбулентных течений в рамках сжимаемых уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью модели Спаларта-Аллараса SA и ее модификаций SA QCR, SARC и SA CC. Для анализа устойчивости ламинарных течений, достаточно заменить входящие в эти уравнения эффективные коэффициенты вязкости и теплопроводности на соответствующие молекулярные коэффициенты переноса и исключить из рассмотрения уравнение переноса турбулентной вязкости.

5.1.1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим через $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, w, T, \mu_t\}^t$ вектор основных переменных трехмерных нестационарных уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа (ρ – плотность, (u, v, w) – проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат (x, y, z) , T – температура, а μ_t – турбулентная динамическая вязкость).

Пусть $\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}, \bar{\mu}_t\}^t$ представляет собой стационарное решение этих уравнений и, соответственно, удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \bar{\rho} \bar{u} / \partial x + \partial \bar{\rho} \bar{v} / \partial y + \partial \bar{\rho} \bar{w} / \partial z = 0 \\ \hline \partial (\bar{\rho} \bar{u}^2 + \bar{\rho} R \bar{T}) / \partial x + \partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} / \partial y + \partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w} / \partial z = \partial \bar{\tau}_{xx} / \partial x + \partial \bar{\tau}_{xy} / \partial y + \partial \bar{\tau}_{xz} / \partial z \\ \hline \partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} / \partial x + \partial (\bar{\rho} \bar{v}^2 + \bar{\rho} R \bar{T}) / \partial y + \partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{w} / \partial z = \partial \bar{\tau}_{xy} / \partial x + \partial \bar{\tau}_{yy} / \partial y + \partial \bar{\tau}_{yz} / \partial z \\ \hline \partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w} / \partial x + \partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{w} / \partial y + \partial (\bar{\rho} \bar{w}^2 + \bar{\rho} R \bar{T}) / \partial z = \partial \bar{\tau}_{xz} / \partial x + \partial \bar{\tau}_{yz} / \partial y + \partial \bar{\tau}_{zz} / \partial z \\ \hline \partial (\bar{\rho} \bar{u} [C_p \bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)]) / \partial x + \partial (\bar{\rho} \bar{v} [C_p \bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)]) / \partial y + \\ + \partial (\bar{\rho} \bar{w} [C_p \bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)]) / \partial z = \partial (\bar{u} \bar{\tau}_{xx} + \bar{v} \bar{\tau}_{xy} + \bar{w} \bar{\tau}_{xz} + \bar{q}_x) / \partial x + \\ + \partial (\bar{u} \bar{\tau}_{xy} + \bar{v} \bar{\tau}_{yy} + \bar{w} \bar{\tau}_{yz} + \bar{q}_y) / \partial y + \partial (\bar{u} \bar{\tau}_{xz} + \bar{v} \bar{\tau}_{yz} + \bar{w} \bar{\tau}_{zz} + \bar{q}_z) / \partial z \end{array} \right. \quad (5.2)$$

При записи этой системы предполагается, что удельная теплоемкость при постоянном давлении C_p является постоянной и что рассматриваемый газ является совершенным, то есть для него выполняется уравнение состояния Клапейрона - Менделеева

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}, \quad (5.3)$$

где \bar{p} - давление, $R = R_0/M$ – газовая постоянная (R_0 – универсальная газовая постоянная, M - молекулярная масса газа).

В случае использования линейных моделей турбулентности компоненты эффективного тензора напряжений $\bar{\tau}_{ij}$ и вектора плотности теплового потока \bar{q}_i , входящие в систему (5.2), моделируются с использованием гипотезы Буссинеска и аналогии Рейнольдса, соответственно²³:

²³ При использовании нелинейной версии модели турбулентности SA QCR [5] в тензоре напряжений появляются дополнительные турбулентные слагаемые, линеаризация которых представлена в разделе 5.1.2.

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{xx} &= 2\bar{\mu}_{eff} \partial\bar{u}/\partial x - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} \overline{div(\vec{V})}, & \bar{\tau}_{xy} &= \bar{\mu}_{eff} (\partial\bar{u}/\partial y + \partial\bar{v}/\partial x), & \bar{\tau}_{xz} &= \bar{\mu}_{eff} (\partial\bar{u}/\partial z + \partial\bar{w}/\partial x), \\
\bar{\tau}_{yy} &= 2\bar{\mu}_{eff} \partial\bar{v}/\partial y - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} \overline{div(\vec{V})}, & \bar{\tau}_{yz} &= \bar{\mu}_{eff} (\partial\bar{v}/\partial z + \partial\bar{w}/\partial y), \\
\bar{\tau}_{zz} &= 2\bar{\mu}_{eff} \partial\bar{w}/\partial z - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} \overline{div(\vec{V})}, & \overline{div(\vec{V})} &= \partial\bar{u}/\partial x + \partial\bar{v}/\partial y + \partial\bar{w}/\partial z, \\
\bar{q}_x &= -(\bar{\lambda}_{eff} \partial\bar{T}/\partial x), & \bar{q}_y &= -(\bar{\lambda}_{eff} \partial\bar{T}/\partial y), & \bar{q}_z &= -(\bar{\lambda}_{eff} \partial\bar{T}/\partial z),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где эффективные коэффициенты вязкости $\bar{\mu}_{eff}$ и теплопроводности $\bar{\lambda}_{eff}$ представляют собой суммы соответствующих молекулярных коэффициентов и их турбулентных аналогов

$$\bar{\mu}_{eff} = \mu(\bar{T}) + \bar{\mu}_t, \quad \bar{\lambda}_{eff} = C_p (\mu(\bar{T})/Pr + \bar{\mu}_t/Pr_t), \tag{5.5}$$

а Pr и Pr_t – молекулярное и турбулентное числа Прандтля. При проведении конкретных расчетов они полагаются равными 0.72 и 0.9, соответственно, а для определения турбулентной вязкости используется модель турбулентности SA и ее модификации. Отметим, что данный выбор обусловлен тем, что эта модель, с одной стороны, является одной из лучших моделей турбулентности для решения задач внешней аэродинамики (см. раздел 1.1), а с другой, – содержит всего одно дифференциальное уравнение, что заметно упрощает построение базирующихся на ЛТУ алгоритмов определения условий устойчивости стационарных уравнений Рейнольдса.

На твердой поверхности используются граничные условия прилипания для скорости и адиабатичности обтекаемой поверхности для температуры

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0, \quad \partial\bar{T}/\partial n = 0, \tag{5.6}$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности.

На внешних “проницаемых” границах расчетной области используются характеристические условия [303], сформулированные относительно инвариантов Римана, связь которых с основными переменными $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}$ определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= \bar{V}_n + 2\bar{a}/(\gamma - 1) = t_{11}\bar{u} + t_{12}\bar{v} + t_{13}\bar{w} + 2\sqrt{\gamma R\bar{T}}/(\gamma - 1), \\
\bar{I}_2 &= \bar{V}_n - 2\bar{a}/(\gamma - 1) = t_{11}\bar{u} + t_{12}\bar{v} + t_{13}\bar{w} - 2\sqrt{\gamma R\bar{T}}/(\gamma - 1), \\
\bar{I}_3 &= \bar{V}_{\tau 1} = t_{21}\bar{u} + t_{22}\bar{v} + t_{23}\bar{w}, \\
\bar{I}_4 &= \bar{V}_{\tau 2} = t_{31}\bar{u} + t_{32}\bar{v} + t_{33}\bar{w}, \\
\bar{I}_5 &= R\bar{T}/\bar{\rho}^{\gamma-1}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь $\bar{a} = \sqrt{\gamma R\bar{T}}$ – локальная скорость звука, $\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты, $C_v = C_p - R$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, матрица t_{ij} является матрицей поворота (направляющих косинусов) между системой координат (x, y, z) и системой координат, связанной

с границей, (n, τ_1, τ_2) , а \bar{V}_n , \bar{V}_{τ_1} и \bar{V}_{τ_2} - нормальная и касательные проекции вектора скорости на границу области.

Форма граничных условий на проницаемых границах зависит от знака нормальной компоненты скорости V_n , то есть от того втекает поток в расчетную область в рассматриваемой точке границы или вытекает из нее. Для рассматриваемых в данной главе дозвуковых течений соответствующие граничные условия ставятся следующим образом.

На «входных» участках границы ($V_n > 0$) значения инвариантов I_1, I_3, I_4 и I_5 определяются по известным параметрам набегающего потока, а инвариант I_2 линейно экстраполируется на границу из внутренних точек расчетной области (это эквивалентно постановке условия $\partial^2 I_2 / \partial n^2 = 0$). На «выходных» участках ($V_n < 0$) задается инвариант I_1 , а значения инвариантов I_2, I_3, I_4 и I_5 определяются с помощью экстраполяции из внутренних точек расчетной области.

В некоторых случаях (при наличии в рассматриваемом течении плоскости симметрии) для сокращения вычислительных затрат проводится расчет в половине области с использованием условий симметрии

$$\partial \bar{\rho} / \partial n = \partial \bar{T} / \partial n = \partial \bar{V}_{\tau_1} / \partial n = \partial \bar{V}_{\tau_2} / \partial n = 0, \quad \bar{V}_n = 0. \quad (5.8)$$

Рассмотрим далее систему нестационарных трехмерных уравнений Рейнольдса.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y + \partial \rho w / \partial z = 0 \\ \partial \rho u / \partial t + \partial (\rho u^2 + \rho RT) / \partial x + \partial \rho uv / \partial y + \partial \rho uw / \partial z = \partial \tau_{xx} / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z \\ \partial \rho v / \partial t + \partial \rho uv / \partial x + \partial (\rho v^2 + \rho RT) / \partial y + \partial \rho vw / \partial z = \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \tau_{yy} / \partial y + \partial \tau_{yz} / \partial z \\ \partial \rho w / \partial t + \partial \rho wu / \partial x + \partial \rho wv / \partial y + \partial (\rho w^2 + \rho RT) / \partial z = \partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y + \partial \tau_{zz} / \partial z \\ \partial (\rho [C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)]) / \partial t + \partial (\rho u [C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)]) / \partial x + \\ \partial (\rho v [C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)]) / \partial y + \partial (\rho w [C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)]) / \partial z = \\ = \partial (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + \lambda_{eff} \partial T / \partial x) / \partial x + \partial (u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} + \lambda_{eff} \partial T / \partial y) / \partial y + \\ + \partial (u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz} + \lambda_{eff} \partial T / \partial z) / \partial z \end{array} \right. , \quad (5.9)$$

где компоненты тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu_{eff} \partial u / \partial x - \frac{2}{3} \mu_{eff} \operatorname{div}(\vec{V}), & \tau_{xy} &= \mu_{eff} (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x), & \tau_{xz} &= \mu_{eff} (\partial u / \partial z + \partial w / \partial x), \\ \tau_{yy} &= 2\mu_{eff} \partial v / \partial y - \frac{2}{3} \mu_{eff} \operatorname{div}(\vec{V}), & \tau_{yz} &= \mu_{eff} (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y), \\ \tau_{zz} &= 2\mu_{eff} \partial w / \partial z - \frac{2}{3} \mu_{eff} \operatorname{div}(\vec{V}), & \operatorname{div}(\vec{V}) &= \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При отсутствии “внешней” нестационарности граничные условия к системе (5.9) совпадают с соответствующими условиями для стационарных уравнений Рейнольдса, представленными выше.

Следуя общему принципу ЛТУ, представим решение системы (5.9) $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, w, T, \mu_t\}'$ в малой окрестности стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}$ системы (5.2) в виде суммы $\bar{\mathbf{q}}$ и малых возмущений \mathbf{q}' :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(x, y, z) + \mathbf{q}'(x, y, z, t). \quad (5.11)$$

Подставляя разложение (5.12) в систему (5.10) с учетом того, что $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет системе (5.2), а также используя допущение о малости возмущений \mathbf{q}' , то есть, пренебрегая нелинейными относительно \mathbf{q}' членами, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно возмущений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}w' + \rho'\bar{w})}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho'u'^2 + 2\bar{\rho}u'u' + \bar{\rho}RT' + \rho'R\bar{T})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}u'v' + \bar{\rho}u'\bar{v} + \rho'u'\bar{v})}{\partial y} + \\ + \frac{\partial(\bar{\rho}u'w' + \bar{\rho}u'\bar{w} + \rho'u'\bar{w})}{\partial z} = \frac{\partial\tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u'v' + \bar{\rho}u'\bar{v} + \rho'u'\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho'v'^2 + 2\bar{\rho}v'v' + \bar{\rho}RT' + \rho'R\bar{T})}{\partial y} + \\ + \frac{\partial(\bar{\rho}v'w' + \bar{\rho}v'\bar{w} + \rho'v'\bar{w})}{\partial z} = \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\bar{\rho}w' + \rho'\bar{w})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u'w' + \bar{\rho}u'\bar{w} + \rho'u'\bar{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v'w' + \bar{\rho}v'\bar{w} + \rho'v'\bar{w})}{\partial y} + \\ + \frac{\partial(\rho'w'^2 + 2\bar{\rho}w'w' + \bar{\rho}RT' + \rho'R\bar{T})}{\partial z} = \frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho'(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial t} + \\ + \frac{\partial((\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}u'(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial x} + \\ + \frac{\partial((\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}v'(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial y} + \\ + \frac{\partial((\bar{\rho}w' + \rho'\bar{w})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}w'(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial z} = \\ = \frac{\partial(u'\bar{\tau}_{xx} + v'\bar{\tau}_{xy} + w'\bar{\tau}_{xz} + \bar{u}\tau'_{xx} + \bar{v}\tau'_{xy} + \bar{w}\tau'_{xz} + \bar{\lambda}_{eff}\partial T'/\partial x + \lambda'_{eff}\partial\bar{T}/\partial x)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial(u'\bar{\tau}_{xy} + v'\bar{\tau}_{yy} + w'\bar{\tau}_{yz} + \bar{u}\tau'_{xy} + \bar{v}\tau'_{yy} + \bar{w}\tau'_{yz} + \bar{\lambda}_{eff}\partial T'/\partial y + \lambda'_{eff}\partial\bar{T}/\partial y)}{\partial y} + \\ + \frac{\partial(u'\bar{\tau}_{xz} + v'\bar{\tau}_{yz} + w'\bar{\tau}_{zz} + \bar{u}\tau'_{xz} + \bar{v}\tau'_{yz} + \bar{w}\tau'_{zz} + \bar{\lambda}_{eff}\partial T'/\partial z + \lambda'_{eff}\partial\bar{T}/\partial z)}{\partial z} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} \tau'_{xx} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu'_t \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right), \\ \tau'_{xy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \mu'_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \\ \tau'_{yy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu'_t \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right), \\ \tau'_{xz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \mu'_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}\tau'_{yz} &= \bar{\mu}_{eff} (\partial v'/\partial z + \partial w'/\partial y) + \mu'_t (\partial \bar{v}/\partial z + \partial \bar{w}/\partial y), \\ \tau'_{zz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(-\frac{2}{3} \partial u'/\partial x - \frac{2}{3} \partial v'/\partial y + \frac{4}{3} \partial w'/\partial z \right) + \mu'_t \left(-\frac{2}{3} \partial \bar{u}/\partial x - \frac{2}{3} \partial \bar{v}/\partial y + \frac{4}{3} \partial \bar{w}/\partial z \right), \\ \lambda'_{eff} &= C_p \mu'_t / Pr_t.\end{aligned}$$

Вектор возмущений $\mathbf{q}'(x, y, z, t)$ может быть представлен в обобщенной гармонической форме (см., например, [388])²⁴:

$$\{\rho', u', v', w', T', \mu'_t\}' = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{\mu}_t\}' \cdot \exp(-i\omega t) \quad (5.14)$$

Здесь вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{\mu}_t\}'$ представляет собой комплексный вектор амплитуд возмущений, ω - комплексная частота возмущений, а i - мнимая единица.

Подстановка выражений для возмущений (5.14) в систему уравнений (5.12) с учетом (5.13) позволяет получить следующую систему уравнений для возмущений:

$$\left\{ \begin{aligned} & -i\omega \tilde{\rho} + \partial(\bar{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\bar{u})/\partial x + \partial(\bar{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\bar{v})/\partial y + \partial(\bar{\rho}\tilde{w} + \tilde{\rho}\bar{w})/\partial z = 0 \\ & -i\omega(\bar{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\bar{u}) + \partial(\tilde{\rho}\bar{u}^2 + 2\bar{\rho}\tilde{u}\bar{u} + \bar{\rho}R\tilde{T} + \tilde{\rho}R\bar{T})/\partial x + \partial(\bar{\rho}\tilde{u}\bar{v} + \bar{\rho}\tilde{u}\bar{v} + \tilde{\rho}\bar{u}\bar{v})/\partial y + \\ & + \partial(\bar{\rho}\tilde{u}\bar{w} + \bar{\rho}\tilde{u}\bar{w} + \tilde{\rho}\bar{u}\bar{w})/\partial z = \partial\tilde{\tau}_{xx}/\partial x + \partial\tilde{\tau}_{xy}/\partial y + \partial\tilde{\tau}_{xz}/\partial z \\ & -i\omega(\bar{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\bar{v}) + \partial(\bar{\rho}\tilde{v}\bar{u} + \bar{\rho}\tilde{v}\bar{u} + \tilde{\rho}\bar{v}\bar{u})_{xx}/\partial x + \partial(\tilde{\rho}\bar{v}^2 + 2\bar{\rho}\tilde{v}\bar{v} + \bar{\rho}R\tilde{T} + \tilde{\rho}R\bar{T})/\partial y + \\ & + \partial(\bar{\rho}\tilde{v}\bar{w} + \bar{\rho}\tilde{v}\bar{w} + \tilde{\rho}\bar{v}\bar{w})/\partial z = \partial\tilde{\tau}_{xy}/\partial x + \partial\tilde{\tau}_{yy}/\partial y + \partial\tilde{\tau}_{yz}/\partial z \\ & -i\omega(\bar{\rho}\tilde{w} + \tilde{\rho}\bar{w}) + \partial(\bar{\rho}\tilde{w}\bar{u} + \bar{\rho}\tilde{w}\bar{u} + \tilde{\rho}\bar{w}\bar{u})/\partial x + \partial(\bar{\rho}\tilde{w}\bar{v} + \bar{\rho}\tilde{w}\bar{v} + \tilde{\rho}\bar{w}\bar{v})/\partial y + \\ & + \partial(\tilde{\rho}\bar{w}^2 + 2\bar{\rho}\tilde{w}\bar{w} + \bar{\rho}R\tilde{T} + \tilde{\rho}R\bar{T})/\partial z = \partial\tilde{\tau}_{xz}/\partial x + \partial\tilde{\tau}_{yz}/\partial y + \partial\tilde{\tau}_{zz}/\partial z \\ & -i\omega(\tilde{\rho}(C_v\tilde{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}(C_v\tilde{T} + \bar{u}\tilde{u} + \bar{v}\tilde{v} + \bar{w}\tilde{w})) + \\ & + \partial((\bar{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\bar{u})(C_p\tilde{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}\bar{u}(C_p\tilde{T} + \bar{u}\tilde{u} + \bar{v}\tilde{v} + \bar{w}\tilde{w}))/\partial x + \\ & + \partial((\bar{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\bar{v})(C_p\tilde{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}\bar{v}(C_p\tilde{T} + \bar{u}\tilde{u} + \bar{v}\tilde{v} + \bar{w}\tilde{w}))/\partial y + \\ & + \partial((\bar{\rho}\tilde{w} + \tilde{\rho}\bar{w})(C_p\tilde{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}\bar{w}(C_p\tilde{T} + \bar{u}\tilde{u} + \bar{v}\tilde{v} + \bar{w}\tilde{w}))/\partial z = \\ & = \partial(\tilde{u}\bar{\tau}_{xx} + \tilde{v}\bar{\tau}_{xy} + \tilde{w}\bar{\tau}_{xz} + \bar{u}\tilde{\tau}_{xx} + \bar{v}\tilde{\tau}_{xy} + \bar{w}\tilde{\tau}_{xz} + \bar{\lambda}_{eff} \partial\tilde{T}/\partial x + \tilde{\lambda}_{eff} \partial\bar{T}/\partial x)/\partial x + \\ & + \partial(\tilde{u}\bar{\tau}_{xy} + \tilde{v}\bar{\tau}_{yy} + \tilde{w}\bar{\tau}_{yz} + \bar{u}\tilde{\tau}_{xy} + \bar{v}\tilde{\tau}_{yy} + \bar{w}\tilde{\tau}_{yz} + \bar{\lambda}_{eff} \partial\tilde{T}/\partial y + \tilde{\lambda}_{eff} \partial\bar{T}/\partial y)/\partial y + \\ & + \partial(\tilde{u}\bar{\tau}_{xz} + \tilde{v}\bar{\tau}_{yz} + \tilde{w}\bar{\tau}_{zz} + \bar{u}\tilde{\tau}_{xz} + \bar{v}\tilde{\tau}_{yz} + \bar{w}\tilde{\tau}_{zz} + \bar{\lambda}_{eff} \partial\tilde{T}/\partial z + \tilde{\lambda}_{eff} \partial\bar{T}/\partial z)/\partial z \end{aligned} \right. , \quad (5.15)$$

где

²⁴ Физический смысл имеет только вещественная часть (5.14).

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{xx} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \partial \tilde{u} / \partial x - \frac{2}{3} \partial \tilde{v} / \partial y - \frac{2}{3} \partial \tilde{w} / \partial z \right) + \tilde{\mu}_t \left(\frac{4}{3} \partial \bar{u} / \partial x - \frac{2}{3} \partial \bar{v} / \partial y - \frac{2}{3} \partial \bar{w} / \partial z \right), \\
\tilde{\tau}_{xy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\partial \tilde{u} / \partial y + \partial \tilde{v} / \partial x \right) + \tilde{\mu}_t \left(\partial \bar{u} / \partial y + \partial \bar{v} / \partial x \right), \\
\tilde{\tau}_{yy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(-\frac{2}{3} \partial \tilde{u} / \partial x + \frac{4}{3} \partial \tilde{v} / \partial y - \frac{2}{3} \partial \tilde{w} / \partial z \right) + \tilde{\mu}_t \left(-\frac{2}{3} \partial \bar{u} / \partial x + \frac{4}{3} \partial \bar{v} / \partial y - \frac{2}{3} \partial \bar{w} / \partial z \right), \\
\tilde{\tau}_{xz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\partial \tilde{u} / \partial z + \partial \tilde{w} / \partial x \right) + \tilde{\mu}_t \left(\partial \bar{u} / \partial z + \partial \bar{w} / \partial x \right), \\
\tilde{\tau}_{yz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\partial \tilde{v} / \partial z + \partial \tilde{w} / \partial y \right) + \tilde{\mu}_t \left(\partial \bar{v} / \partial z + \partial \bar{w} / \partial y \right), \\
\tilde{\tau}_{zz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(-\frac{2}{3} \partial \tilde{u} / \partial x - \frac{2}{3} \partial \tilde{v} / \partial y + \frac{4}{3} \partial \tilde{w} / \partial z \right) + \tilde{\mu}_t \left(-\frac{2}{3} \partial \bar{u} / \partial x - \frac{2}{3} \partial \bar{v} / \partial y + \frac{4}{3} \partial \bar{w} / \partial z \right), \\
\tilde{\lambda}_{eff} &= C_p \tilde{\mu}_t / Pr_t.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Система уравнений (5.15) – (5.16) может быть представлена в следующей операторной форме:

$$-i\omega W \cdot \tilde{\mathbf{q}} + M(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \tag{5.17}$$

где вещественные матрица W и дифференциальный оператор M не зависят от вектора амплитуд возмущений $\tilde{\mathbf{q}}$. Умножение системы (5.17) слева на матрицу

$$W^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\bar{v}/\bar{\rho} & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 \\
\hline
-\bar{w}/\bar{\rho} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 \\
\hline
-\bar{T}/\bar{\rho} + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)/(2C_v\bar{\rho}) & -\bar{u}/(C_v\bar{\rho}) & -\bar{v}/(C_v\bar{\rho}) & -\bar{w}/(C_v\bar{\rho}) & 1/(C_v\bar{\rho})
\end{array} \right) \tag{5.18}$$

позволяет получить окончательную линейную систему уравнений в операторной форме:

$$-i\omega \tilde{\mathbf{q}} + L(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \tag{5.19}$$

где $L(\bar{\mathbf{q}})$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка (отметим, что на практике данное преобразование осуществляется уже после дискретизации уравнений).

При проведении анализа устойчивости во вращающейся с угловой скоростью $\bar{\mathbf{\Omega}} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^t$ системе координат необходимо учитывать силу Кориолиса, входящую в правую часть уравнений движения (5.2) и (5.9):

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{Coriolis}} = -2(\bar{\mathbf{\Omega}} \times \bar{\mathbf{V}}) = \{2v\Omega_z - 2w\Omega_y \mid 2w\Omega_x - 2u\Omega_z \mid 2u\Omega_y - 2v\Omega_x\}^t. \tag{5.20}$$

Линеаризация силы Кориолиса приводит к добавлению в правую часть (5.15) соответствующего слагаемого

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\text{Coriolis}} = (0 \mid -2\Omega_z \tilde{v} + 2\Omega_y \tilde{w} \mid 2\Omega_z \tilde{u} - 2\Omega_x \tilde{w} \mid -2\Omega_y \tilde{u} + 2\Omega_x \tilde{v} \mid 0)^t. \tag{5.21}$$

Граничные условия к уравнениям для возмущений можно легко получить путем линеаризации соответствующих граничных условий для нестационарных уравнений Рейнольдса после представления основных переменных в виде суммы стационарного решения и малых возмущений (5.11) с использованием гармонической формы возмущений (5.14).

Полученные таким образом граничные условия для амплитуд возмущений на твердой стенке имеют вид

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0, \quad \partial \tilde{\rho} / \partial n = \partial \tilde{T} / \partial n = 0, \quad (5.22)$$

а выражения для возмущений инвариантов Римана (5.8) принимают форму

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= t_{11} \tilde{u} + t_{12} \tilde{v} + t_{13} \tilde{w} + \left[\sqrt{\gamma R} / (\gamma - 1) \sqrt{\tilde{T}} \right] \tilde{T}, \\ \tilde{I}_2 &= t_{11} \tilde{u} + t_{12} \tilde{v} + t_{13} \tilde{w} - \left[\sqrt{\gamma R} / (\gamma - 1) \sqrt{\tilde{T}} \right] \tilde{T}, \\ \tilde{I}_3 &= t_{21} \tilde{u} + t_{22} \tilde{v} + t_{23} \tilde{w}, \quad \tilde{I}_4 = t_{31} \tilde{u} + t_{32} \tilde{v} + t_{33} \tilde{w}, \\ \tilde{I}_5 &= \left[R / \bar{\rho}^{\gamma-1} \right] \tilde{T} - \left[(\gamma - 1) \bar{T} / \bar{\rho}^{\gamma} \right] \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

после чего граничные условия для возмущений на входных и выходных участках проницаемой границы расчетной области можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 = \tilde{I}_3 = \tilde{I}_4 = \tilde{I}_5 = 0, \quad \partial^2 \tilde{I}_2 / \partial n^2 = 0, \\ \partial^2 \tilde{I}_2 / \partial n^2 = \partial^2 \tilde{I}_3 / \partial n^2 = \partial^2 \tilde{I}_4 / \partial n^2 = \partial^2 \tilde{I}_5 / \partial n^2 = 0, \quad \tilde{I}_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Следует отметить, что при наличии у течения плоскости симметрии в некоторых случаях для возмущений на этой плоскости могут использоваться антисимметричные условия

$$\tilde{\rho} = \tilde{V}_{\tau_1} = \tilde{V}_{\tau_2} = \tilde{T} = \tilde{v}_t = 0, \quad \partial \tilde{V}_n / \partial y = 0. \quad (5.25)$$

что позволяет решать задачу об устойчивости в половине области²⁵.

Система уравнений (5.19) с граничными условиями (5.22) - (5.25) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора, метод решения которой будет рассмотрен в разделе 5.2. При этом наличие хотя бы одного собственного числа с положительной мнимой частью ω_i означает неустойчивость стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}$, поскольку в нем с течением времени развиваются возмущения, форма которых определяется со-

²⁵ В данной работе такой подход использовался для определения условий начала бафтинга при обтекании двояковыпуклого симметричного аэродинамического профиля (см. раздел 5.3.3.1).

ответствующим собственным вектором. В случае наличия нескольких собственных чисел с положительной мнимой частью, как правило, реализуется то возмущение, мнимая часть которого максимальна.

5.1.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Для замыкания полученной в предыдущем разделе системы уравнений для амплитуд возмущений к ней необходимо добавить уравнение для амплитуды возмущений турбулентной вязкости μ_t . В настоящей работе это уравнение было получено путем линеаризации модели SA и ее модификаций SARC, SA CC и SA QCR (формулировка всех этих моделей приведена в разделе 1.1)²⁶.

Линеаризация моделей SA и SARC

К сожалению, строгая линеаризация уравнения переноса турбулентной вязкости модели SA (1.2) невозможна, поскольку входящая в нее функция f_{t1} не является дифференцируемой. Однако, учитывая то, что положение точки перехода в рамках этой модели является фиксированным, можно считать, что возмущения последнего члена уравнения (1.2) не сказываются на устойчивости стационарного решения, поэтому проводить его линеаризацию нет необходимости.

Также невозможно линеаризовать величину \tilde{r} , входящую в поправочную функцию f_{r1} модели SARC, учитывающую влияние кривизны линий тока и вращения потока на турбулентность. Поэтому анализ устойчивости течений, для которых базовое решение было получено с использованием модели SARC, проводился в предположении о том, что величина f_{r1} является “замороженной”, то есть ее возмущения полагались равными нулю.

С учетом сделанных оговорок может быть получено следующее линейное уравнение для амплитуд возмущений величины турбулентной вязкости модели SARC ²⁷ (соответствующее уравнение для модели SA получается путем замены величины \bar{f}_{r1} на 1).

²⁶ При расчете базового поля для замыкания уравнений Рейнольдса должна использоваться та же модель, что и при анализе его устойчивости.

²⁷ Поскольку в работах по анализу устойчивости «волной» традиционно обозначаются амплитуды возмущений, в приведенных ниже уравнениях вместо оригинально обозначения модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$ в SA модели (1.2) используется обозначение ν_{SA} , а генерационный член этого уравнения \tilde{S} обозначается через S_{SA} .

$$\begin{aligned}
& -i\omega(\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA}) + \partial(\bar{\rho}\tilde{u}\bar{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{u}\tilde{v}_{SA} + \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}_{SA})/\partial x + \\
& + \partial(\bar{\rho}\tilde{v}\bar{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}\tilde{v}_{SA} + \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v}_{SA})/\partial y + \partial(\bar{\rho}\tilde{w}\bar{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{w}\tilde{v}_{SA} + \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{v}_{SA})/\partial z = \\
& = \frac{1+C_{b2}}{\sigma} \left[\begin{aligned} & \partial((\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\tilde{v}_{SA}/\partial x)/\partial x + \partial((\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\bar{v}_{SA}/\partial x)/\partial x + \\ & + \partial((\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\tilde{v}_{SA}/\partial y)/\partial y + \partial((\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\bar{v}_{SA}/\partial y)/\partial y + \\ & + \partial((\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\tilde{v}_{SA}/\partial z)/\partial z + \partial((\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\bar{v}_{SA}/\partial z)/\partial z \end{aligned} \right] - \\
& - \frac{C_{b2}}{\sigma} \left[(\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA}) \left(\frac{\partial^2\tilde{v}_{SA}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}_{SA}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}_{SA}}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2\bar{v}_{SA}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{v}_{SA}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{v}_{SA}}{\partial z^2} \right) (\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA}) \right] + \\
& + \left[C_{b1}(\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{r2}) + C_{w1}\kappa^2(\partial\bar{f}_w/\partial r)\bar{r}^2 \right] \bar{\rho}\bar{v}_{SA}\tilde{\Omega} + \\
& + \left[\begin{aligned} & C_{b1} \left(\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{r2} - \chi \frac{\partial\bar{f}_{t2}}{\partial\chi} \right) + C_{b1}\bar{r} \left(\left(\bar{f}_{v2} + \chi \frac{\partial\bar{f}_{v2}}{\partial\chi} \right) (\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{r2}) + 2\bar{f}_{t2} + \chi \frac{\partial\bar{f}_{t2}}{\partial\chi} \right) - \\ & - C_{w1}\kappa^2\bar{r} \left(2\bar{f}_w + \frac{\partial\bar{f}_w}{\partial r}\bar{r} - \frac{\partial\bar{f}_w}{\partial r}\bar{r}^2 \left(\bar{f}_{v2} + \chi \frac{\partial\bar{f}_{v2}}{\partial\chi} \right) \right) \end{aligned} \right] \bar{\rho}\bar{S}_{SA}\tilde{v}_{SA} + \\
& + \left[\begin{aligned} & C_{b1} \left(\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{r2} - \chi \frac{\partial\bar{f}_{t2}}{\partial\chi} \right) + C_{b1}\bar{r} \left(\chi \frac{\partial\bar{f}_{v2}}{\partial\chi} (\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{r2}) + \bar{f}_{t2} + \chi \frac{\partial\bar{f}_{t2}}{\partial\chi} \right) - \\ & - C_{w1}\kappa^2\bar{r} \left(\bar{f}_w - \frac{\partial\bar{f}_w}{\partial r}\bar{r}^2 \chi \frac{\partial\bar{f}_{v2}}{\partial\chi} \right) \end{aligned} \right] \bar{v}_{SA}\bar{S}_{SA}\tilde{\rho}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Здесь

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} \right) \right], \tag{5.27}$$

а входящие в правую часть (5.26) выражения для производных функций модели Спаларта-Алл-мараса определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{f}_w}{\partial r}\bar{r} &= \frac{\partial\bar{f}_w}{\partial\bar{g}} \cdot \frac{\partial\bar{g}}{\partial r} \cdot \bar{r} = \frac{C_{w3}^6}{\bar{g}^6 + C_{w3}^6} \left(\frac{1+C_{w3}^6}{\bar{g}^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \cdot (\bar{r} + C_{w2}(6\bar{r}^6 - \bar{r})), \\
\chi \partial\bar{f}_{v2}/\partial\chi &= \chi \left(\chi \left(3\chi^3 C_{v1}^3 / (\chi^3 + C_{v1}^3)^2 \right) - 1 \right) / (1 + \chi\bar{f}_{v1})^2, \\
\chi \partial\bar{f}_{t2}/\partial\chi &= -2C_{t4}\chi^2\bar{f}_{t2}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Наконец, величина $\tilde{\mu}_t$, входящая в (5.16), определяется выражением

$$\tilde{\mu}_t = (\bar{f}_{v1} + \chi \partial\bar{f}_{v1}/\partial\chi)(\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \bar{v}_{SA}\tilde{\rho}) = \left(\bar{f}_{v1} + 3\chi^3 C_{v1}^3 / (\chi^3 + C_{v1}^3)^2 \right) (\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \bar{v}_{SA}\tilde{\rho}). \tag{5.29}$$

Граничные условия для возмущений \tilde{v}_{SA} получаются путем линеаризации соответствующих граничных условий для v_{SA} .

Линеаризация поправки на сжимаемость потока в модели SA CC

При расчете трансзвуковых течений в диссертации использовалась модель SA с поправкой на сжимаемость потока SACC (1.6), которую можно выразить через основные переменные следующим образом:

$$-C_5 \rho v_{SA}^2 S^2 / (\gamma RT), \quad (5.30)$$

где S определяется выражением (1.7), а константа $C_5=3.5$.

Линеаризация (5.30) приводит к добавлению в правую часть уравнения (5.26) следующих слагаемых

$$-C_5 \left[2\bar{\rho} v_{SA} \bar{S}^2 \tilde{v}_{SA} + \bar{\rho} v_{SA}^2 \tilde{S}^2 + \bar{v}_{SA}^2 \bar{S}^2 \tilde{\rho} - \bar{\rho} v_{SA}^2 \bar{S}^2 \tilde{T} / \bar{T} \right] / \gamma R \bar{T}, \quad (5.31)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}^2 = & 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) + \\ & + 4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 4 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + 4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Линеаризация модели SA QCR

В ряде рассмотренных ниже задач для замыкания системы уравнений движения использовалась нелинейная версия SA модели SA QCR [5]. В этой модели вместо обобщенной гипотезы Буссинеска для определения тензора напряжений Рейнольдса используется следующее нелинейное соотношение

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \tau_{ij}^t = \tau_{ij}^L + \tau_{ij}^{NL} = 2\mu_t S_{ij} + C_4 \mu_t (S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}) / \sqrt{R}. \quad (5.33)$$

где $R = (\partial u_k / \partial x_l) (\partial u_k / \partial x_l)$, $C_4 = 1.2$.

Линеаризация дополнительного нелинейного слагаемого τ_{ij}^{NL} приводит к появлению новых членов в уравнениях для амплитуд возмущений (5.15).

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \hline \partial \tilde{\tau}_{xx}^{NL} / \partial x + \partial \tilde{\tau}_{xy}^{NL} / \partial y + \partial \tilde{\tau}_{xz}^{NL} / \partial z \\ \hline \partial \tilde{\tau}_{xy}^{NL} / \partial x + \partial \tilde{\tau}_{yy}^{NL} / \partial y + \partial \tilde{\tau}_{yz}^{NL} / \partial z \\ \hline \partial \tilde{\tau}_{xz}^{NL} / \partial x + \partial \tilde{\tau}_{yz}^{NL} / \partial y + \partial \tilde{\tau}_{zz}^{NL} / \partial z \\ \hline \partial \left(\tilde{u} \bar{\tau}_{xx}^{NL} + \tilde{v} \bar{\tau}_{xy}^{NL} + \tilde{w} \bar{\tau}_{xz}^{NL} + \bar{u} \tilde{\tau}_{xx}^{NL} + \bar{v} \tilde{\tau}_{xy}^{NL} + \bar{w} \tilde{\tau}_{xz}^{NL} \right) / \partial x + \\ + \partial \left(\tilde{u} \bar{\tau}_{xy}^{NL} + \tilde{v} \bar{\tau}_{yy}^{NL} + \tilde{w} \bar{\tau}_{yz}^{NL} + \bar{u} \tilde{\tau}_{xy}^{NL} + \bar{v} \tilde{\tau}_{yy}^{NL} + \bar{w} \tilde{\tau}_{yz}^{NL} \right) / \partial y + \\ + \partial \left(\tilde{u} \bar{\tau}_{xz}^{NL} + \tilde{v} \bar{\tau}_{yz}^{NL} + \tilde{w} \bar{\tau}_{zz}^{NL} + \bar{u} \tilde{\tau}_{xz}^{NL} + \bar{v} \tilde{\tau}_{yz}^{NL} + \bar{w} \tilde{\tau}_{zz}^{NL} \right) / \partial z \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Здесь

$$(\tilde{\tau}_{ij}^{NL}) = \frac{\tau_{ij}^{NL}}{\bar{\mu}_t} \tilde{\mu}_t + \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} (\overline{S\Omega - \Omega S})_{ij} - \frac{\bar{\tau}_{ij}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l}, \quad R = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l}, \quad (5.35)$$

а компоненты тензора амплитуд возмущений $(\overline{S\Omega - \Omega S})_{ij}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} (\overline{S\Omega - \Omega S})_{xx} &= -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, \\ (\overline{S\Omega - \Omega S})_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right], \\ (\overline{S\Omega - \Omega S})_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right], \\ (\overline{S\Omega - \Omega S})_{yy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}, \\ (\overline{S\Omega - \Omega S})_{yz} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right], \\ (\overline{S\Omega - \Omega S})_{zz} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.1.3. КВАЗИТРЕХМЕРНАЯ ВЕРСИЯ МЕТОДА

Как будет показано ниже (см. раздел 5.2.2), трехмерный анализ устойчивости требует очень больших вычислительных ресурсов. Это стимулировало разработку приближенных подходов, в частности, так называемого квазитрехмерного подхода. Строго говоря, он применим только для течений, в которых базовое решение $\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}, \bar{\mu}_t\}^t$ характеризуется наличием трех ненулевых компонент вектора скорости, но не изменяется вдоль одного из пространственных направлений²⁸ (при выводе уравнений для определенности будем считать, что это направление совпадает с осью z , т.е. $\partial \bar{\mathbf{q}} / \partial z = 0$).

²⁸ Отметим, что этот подход может применяться для приближенного анализа устойчивости течений, в которых решение слабо меняется вдоль одного из направлений.

Важным дополнительным предположением, лежащим в основе квазитрехмерного подхода, является предположение о гармоническом характере изменения возмущений вдоль оси z . В этом случае нестационарное возмущение $\mathbf{q}'(x, y, z, t)$ может быть представлено в следующей гармонической форме (см., например, [388]):

$$\{\rho', u', v', w', T', \mu_t'\}^t = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{\mu}_t\}^t \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z]), \quad (5.37)$$

где вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{\mu}_t\}^t$ представляет собой комплексный вектор амплитуд возмущений в плоскости (x, y) , ω – комплексная частота возмущений, а параметр β (вещественный в силу ограниченности решения при $z = \pm\infty$) определяет период решения вдоль направления z .

Следует отметить, что амплитуда возмущений компоненты скорости w умножена на i для того, чтобы в случае $\bar{w} = 0$ (то есть при анализе устойчивости двумерных стационарных решений) итоговая система линейных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений имела вещественные коэффициенты, что существенно уменьшает объем оперативной памяти необходимой для ее численного решения. Это, в свою очередь, приводит к изменению вида матрицы W^{-1} (5.18):

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{v}/\bar{\rho} & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 \\ i\bar{w}/\bar{\rho} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 \\ -\bar{T}/\bar{\rho} + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)/(2C_v\bar{\rho}) & -\bar{u}/(C_v\bar{\rho}) & -\bar{v}/(C_v\bar{\rho}) & -i\bar{w}/(C_v\bar{\rho}) & 1/(C_v\bar{\rho}) \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

В результате система уравнений для амплитуд возмущений (5.15) - (5.16) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& -i\omega\bar{\rho} + \partial(\bar{\rho}\bar{u} + \bar{\rho}\bar{u})/\partial x + \partial(\bar{\rho}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{v})/\partial y - \beta\bar{\rho}\bar{w} + i\beta\bar{\rho}\bar{w} = 0 \\
& -i\omega(\bar{\rho}\bar{u} + \bar{\rho}\bar{u}) + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}^2 + 2\bar{\rho}\bar{u}\bar{u} + \bar{\rho}R\bar{T} + \bar{\rho}R\bar{T})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + i\beta\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} + i\beta\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} - \beta\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xx}}{\bar{\mu}_{eff}} \right) + \beta \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mu}_{eff} \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\mu}_{eff}} \right) - \\
& - \beta^2 \bar{\mu}_{eff} \bar{u} - \beta \bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + i\beta \tilde{\mu}_t \bar{\tau}_{xz} / \bar{\mu}_{eff} \\
& -i\omega(\bar{\rho}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{v}) + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}^2 + 2\bar{\rho}\bar{v}\bar{v} + \bar{\rho}R\bar{T} + \bar{\rho}R\bar{T})}{\partial y} + i\beta\bar{\rho}\bar{v}\bar{w} + i\beta\bar{\rho}\bar{v}\bar{w} - \beta\bar{\rho}\bar{v}\bar{w} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\mu}_{eff}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{yy}}{\bar{\mu}_{eff}} \right) + \beta \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu}_{eff} \bar{w}) - \\
& - \beta^2 \bar{\mu}_{eff} \bar{v} - \beta \bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + i\beta \tilde{\mu}_t \bar{\tau}_{yz} / \bar{\mu}_{eff} \\
& -i\omega(\bar{\rho}\bar{w} - i\bar{\rho}\bar{w}) + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} - i\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} - i\bar{\rho}\bar{u}\bar{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}\bar{w} - i\bar{\rho}\bar{v}\bar{w} - i\bar{\rho}\bar{v}\bar{w})}{\partial y} + \beta\bar{\rho}\bar{w}^2 + 2i\beta\bar{\rho}\bar{w}\bar{w} + \beta\bar{\rho}R\bar{T} + \\
& + \beta\bar{\rho}R\bar{T} = \beta \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mu}_{eff} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - i\tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xz}}{\bar{\mu}_{eff}} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu}_{eff} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - i\tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{yz}}{\bar{\mu}_{eff}} \right) \\
& - \frac{4}{3} \beta^2 \bar{\mu}_{eff} \bar{w} - \frac{2}{3} \beta \bar{\mu}_{eff} (\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y) + \beta \tilde{\mu}_t \bar{\tau}_{zz} / \bar{\mu}_{eff} \\
& -i\omega(\bar{\rho}(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2))) + \bar{\rho}(C_p\bar{T} + \bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + i\bar{w}\bar{w}) + \\
& + \partial((\bar{\rho}\bar{u} + \bar{\rho}\bar{u})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2))) + \bar{\rho}\bar{u}(C_p\bar{T} + \bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + i\bar{w}\bar{w}) / \partial x + \\
& + \partial((\bar{\rho}\bar{v} + \bar{\rho}\bar{v})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2))) + \bar{\rho}\bar{v}(C_p\bar{T} + \bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + i\bar{w}\bar{w}) / \partial y + \\
& + \beta((i\bar{\rho}\bar{w} - \bar{\rho}\bar{w})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2))) + \bar{\rho}\bar{w}(iC_p\bar{T} + i\bar{u}\bar{u} + i\bar{v}\bar{v} - \bar{w}\bar{w}) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_{eff} \bar{u} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \beta \bar{w} \right) + \bar{\mu}_{eff} \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \bar{\mu}_{eff} \bar{w} \left(i\beta \bar{u} + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \right. \\
& + \bar{u} \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xx}}{\bar{\mu}_{eff}} + \bar{v} \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\mu}_{eff}} + \bar{w} \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xz}}{\bar{\mu}_{eff}} + \tilde{u} \bar{\tau}_{xx} + \tilde{v} \bar{\tau}_{xy} + i\tilde{w} \bar{\tau}_{xz} + \bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + C_p \frac{\tilde{\mu}_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \left. \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}_{eff} \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \bar{\mu}_{eff} \bar{v} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \beta \bar{w} \right) + \bar{\mu}_{eff} \bar{w} \left(i\beta \bar{v} + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \right. \\
& + \bar{u} \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\mu}_{eff}} + \bar{v} \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{yy}}{\bar{\mu}_{eff}} + \bar{w} \tilde{\mu}_t \frac{\bar{\tau}_{yz}}{\bar{\mu}_{eff}} + \tilde{u} \bar{\tau}_{xy} + \tilde{v} \bar{\tau}_{yy} + i\tilde{w} \bar{\tau}_{yz} + \bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + C_p \frac{\tilde{\mu}_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \left. \right) - \\
& - \beta^2 \bar{\mu}_{eff} \bar{u}\bar{u} - \beta \bar{\mu}_{eff} \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \beta^2 \bar{\mu}_{eff} \bar{v}\bar{v} - \beta \bar{\mu}_{eff} \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{2}{3} i\beta \bar{\mu}_{eff} \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} i\beta \bar{\mu}_{eff} \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{4}{3} i\beta^2 \bar{\mu}_{eff} \bar{w}\bar{w} + \\
& + i\beta \bar{u} \tilde{\mu}_t \bar{\tau}_{xz} / \bar{\mu}_{eff} + i\beta \bar{v} \tilde{\mu}_t \bar{\tau}_{yz} / \bar{\mu}_{eff} + i\beta \bar{w} \tilde{\mu}_t \bar{\tau}_{zz} / \bar{\mu}_{eff} + i\beta \tilde{u} \bar{\tau}_{xz} + i\beta \tilde{v} \bar{\tau}_{yz} - \beta \tilde{w} \bar{\tau}_{zz} - \beta^2 \bar{\lambda}_{eff} \bar{T}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Здесь компоненты эффективного тензора напряжений $\bar{\tau}_{ij}$ и вектора плотности теплового потока \bar{q}_i , входящие в систему (5.39), определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{xx} &= 2\bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}), & \bar{\tau}_{xy} &= \bar{\mu}_{eff} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}), & \bar{\tau}_{xz} &= \bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \\
\bar{\tau}_{yy} &= 2\bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}), & \bar{\tau}_{yz} &= \bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, & \bar{\tau}_{zz} &= -\frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}), \\
\bar{q}_x &= -\bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, & \bar{q}_y &= -\bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Выражение для линеаризованной силы Кориолиса (5.21), входящей в правую часть (5.39) при расчете во вращающейся системе координат, преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\text{Coriolis}} = \left(0 \mid -2\Omega_z \tilde{v} + 2\Omega_y i\tilde{w} \mid 2\Omega_z \tilde{u} - 2i\Omega_x \tilde{w} \mid 2\Omega_y i\tilde{u} - 2\Omega_x i\tilde{v} \mid 0 \right)^t. \tag{5.41}$$

Уравнение для амплитуды возмущений модифицированной турбулентной вязкости для SACC модели (5.26), (5.38) выглядят в квазитрехмерной постановке следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -i\omega(\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA}) + \partial(\bar{\rho}\tilde{u}\bar{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{u}\bar{v}_{SA} + \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}_{SA})/\partial x + \partial(\bar{\rho}\tilde{v}\bar{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}\bar{v}_{SA} + \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v}_{SA})/\partial y \\
& + i\beta\bar{w}(\bar{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA}) - \beta\bar{\rho}\tilde{w}\bar{v}_{SA} = \\
& = \frac{1+C_{b2}}{\sigma} \left[\frac{\partial((\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\tilde{v}_{SA}/\partial x)/\partial x + \partial((\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\tilde{v}_{SA}/\partial y)/\partial y +}{\sigma} \right. \\
& \left. + \partial((\tilde{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\bar{v}_{SA}/\partial x)/\partial x + \partial((\tilde{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA})\partial\bar{v}_{SA}/\partial y)/\partial y - \beta^2(\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA})\tilde{v}_{SA} \right] - \\
& - \frac{C_{b2}}{\sigma} \left[(\mu + \bar{\rho}\bar{v}_{SA}) \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_{SA}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_{SA}}{\partial y^2} - \beta^2 \tilde{v}_{SA} \right) + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_{SA}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_{SA}}{\partial y^2} \right) (\tilde{\rho}\tilde{v}_{SA} + \tilde{\rho}\bar{v}_{SA}) \right] + \\
& + \left[C_{b1}(\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{t2}) + C_{w1}\kappa^2 \left(\frac{\partial \bar{f}_w}{\partial r} \right) \bar{r}^2 \right] \bar{\rho}\bar{v}_{SA} \tilde{\Omega} + \\
& + \left[C_{b1} \left(\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{t2} - \chi \frac{\partial \bar{f}_{t2}}{\partial \chi} \right) + C_{b1} \bar{r} \left(\left(\bar{f}_{v2} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{v2}}{\partial \chi} \right) (\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{t2}) + 2\bar{f}_{t2} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{t2}}{\partial \chi} \right) - \right. \\
& \left. - C_{w1}\kappa^2 \bar{r} \left(2\bar{f}_w + \frac{\partial \bar{f}_w}{\partial r} \bar{r} - \frac{\partial \bar{f}_w}{\partial r} \bar{r}^2 \left(\bar{f}_{v2} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{v2}}{\partial \chi} \right) \right) \right] \bar{\rho}\bar{S}_{SA} \tilde{v}_{SA} + \\
& + \left[C_{b1} \left(\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{t2} - \chi \frac{\partial \bar{f}_{t2}}{\partial \chi} \right) + C_{b1} \bar{r} \left(\chi \frac{\partial \bar{f}_{v2}}{\partial \chi} (\bar{f}_{r1} - \bar{f}_{t2}) + \bar{f}_{t2} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{t2}}{\partial \chi} \right) - \right. \\
& \left. - C_{w1}\kappa^2 \bar{r} \left(\bar{f}_w - \frac{\partial \bar{f}_w}{\partial r} \bar{r}^2 \chi \frac{\partial \bar{f}_{v2}}{\partial \chi} \right) \right] \bar{v}_{SA} \bar{S}_{SA} \tilde{\rho} - \\
& - C_5 \left[2\bar{\rho}\bar{v}_{SA} \bar{S}^2 \tilde{v}_{SA} + \bar{\rho}\bar{v}_{SA}^2 \tilde{S}^2 + \bar{v}_{SA}^2 \bar{S}^2 \tilde{\rho} - \bar{\rho}\bar{v}_{SA}^2 \bar{S}^2 \tilde{T}/\bar{T} \right] / \gamma R \bar{T}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} &= \frac{1}{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \beta \tilde{u} \right) + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \beta \tilde{v} \right) \right], \\
\tilde{S}^2 &= 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 4 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + 2i \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \beta \tilde{u} \right) + 2i \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \beta \tilde{v} \right).
\end{aligned}$$

Наконец, при использовании в рамках квазитрехмерного подхода нелинейной модели SA QCR (5.34) в правую часть уравнений для амплитуд возмущений компонент вектора скорости и температуры (5.39) следует ввести ряд дополнительных членов, выражения которых представлены ниже.

Уравнение для амплитуды возмущений компоненты скорости \tilde{u} :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] - \\
& -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{R} + \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] - \\
& -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{R} - \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] - \\
& -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{\bar{\mu}_t} \tilde{\mu}_t \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{\bar{\mu}_t} \tilde{\mu}_t \right) + i\beta \left(\frac{\bar{\tau}_{xz}^{NL}}{\bar{\mu}_t} \tilde{\mu}_t \right) - \\
& -i \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{R} - \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right] - i \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right] - \\
& -i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{\tau}_{xx}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right] - i \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\bar{\tau}_{xy}^{NL}}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right] - \\
& -\beta^2 \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \tilde{u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \tilde{v} \right] - i\beta^2 \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tilde{w} \right] - \\
& -\frac{i\beta \bar{\tau}_{xz}^{NL}}{R} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] + \frac{\beta \bar{\tau}_{xz}^{NL}}{R} \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right] - \\
& -i\beta \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] + \beta \frac{C_4 \bar{\mu}_t}{\sqrt{R}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

5.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

5.2.1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ.

Коэффициенты обобщенной задачи на собственные значения дифференциального оператора, сформулированной в предыдущих разделах, зависят от решения стационарных уравнений $\bar{\mathbf{q}}$ ²⁹. Поскольку это решение получается численно на некоторой разностной сетке, решение задачи на собственные значения естественно проводить на той же самой сетке.

Введем сквозную нумерацию узлов разностной сетки, используемой для получения базового решения $\bar{\mathbf{q}}$. Тогда дискретный аналог вектора амплитуд возмущений на этой сетке будет иметь следующий вид

$$\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{\rho}_1, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1, \tilde{T}_1, \tilde{v}_{SA,1}, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n, \tilde{T}_n, \tilde{v}_{SA,n}, \dots, \tilde{\rho}_{N_p}, \tilde{u}_{N_p}, \tilde{v}_{N_p}, \tilde{w}_{N_p}, \tilde{T}_{N_p}, \tilde{v}_{SA,N_p}]^T, \quad (5.43)$$

где N_p – общее количество узлов сетки.

Размерность этого вектора составляет $N_V = n_{var} \times N_p$ (n_{var} – количество основных переменных, относительно которых решаются уравнения Рейнольдса совместно с моделью турбулентности или уравнения Навье-Стокса)³⁰.

Независимо от конкретных способов аппроксимации системы дифференциальных уравнений (5.19) и соответствующих линеаризованных граничных условий, их дискретные аналоги можно представить в виде следующей обобщенной задачи на собственные значения для матрицы S , представляющей собой дискретный аналог линейного дифференциального оператора $L(\bar{\mathbf{q}}) = W^{-1}(\bar{\mathbf{q}})M(\bar{\mathbf{q}})$ в уравнении (5.19) с соответствующими граничными условиями

$$(-i\omega T + S) \cdot \tilde{\mathbf{a}} = 0. \quad (5.44)$$

Отметим, что матрицы T и S имеют размерность $N_V \times N_V$ и не зависят от вектора амплитуд возмущений (являются функциями только базового решения, полученного на рассматриваемой расчетной сетке). Матрица T является диагональной матрицей, в которой элементы T_{ii} , соответствующие внутренним точкам области, равны 1, а остальные являются нулевыми.

²⁹ Получение стационарного численного решения в случае его неустойчивости далеко не всегда возможно, но для рассмотренных в диссертации задач и режимов течения (недалеко от границы устойчивости) эти решения удалось получить благодаря применению в стационарной ветке NTS кода современных высокоустойчивых противопоточных схем.

³⁰ Для трехмерных турбулентных течений количество переменных равно 6, для турбулентных двумерных или ламинарных трехмерных течений – 5, а для ламинарных двумерных течений – 4.

Для вычисления элементов матрицы S необходимо выбрать конкретную разностную аппроксимацию дифференциального оператора $M(\bar{q})$. В настоящей работе для этой цели использовалась “гибридная” схема, представляющая собой взвешенную сумму противопоточной и центрально-разностной аппроксимаций:

$$\Delta_H = \alpha_H \Delta_{3u} + (1 - \alpha_H) \Delta_{4c}, \quad 0 \leq \alpha_H \leq 1, \quad (5.45)$$

где конечно-разностные операторы Δ_{3u} и Δ_{4c} соответствуют противопоточной аппроксимации 3-го порядка и центрально-разностной аппроксимации 4-го порядка, а α_H – вес противопоточной схемы (в большинстве рассмотренных задач его величина составляла 0.2).

5.2.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Поскольку размерность матрицы S , для которой численно решается задача на собственные значения, равна произведению общего количества узлов сетки на количество переменных, ее хранение в оперативной памяти компьютера для сколько-либо сложных задач невозможно. Поэтому необходимо использовать специальные методы хранения матриц, учитывающие их разреженность, что исключает возможность применения QZ - алгоритма [389], позволяющего найти полный набор собственных чисел и собственных векторов матрицы, но требующего хранения плотных матриц.

С учетом этого при численном исследовании устойчивости вязких течений для решения задачи на собственные значения применяются методы, в основе которых лежит проектирование на подпространство Крылова [389] (см., например, [390] и [391]). Эти методы позволяют получить запрашиваемое количество наибольших по модулю собственных чисел и соответствующих им собственных векторов, представляющих основной практический интерес, и поэтому являются гораздо более экономичными, чем QZ – алгоритм, основанный на обобщенном разложении Шура. К этому классу методов относится, в частности, метод Арнольди [392], созданный для решения задач на собственные значения с неэрмитовыми матрицами (именно к этому типу относится матрица S). Данный метод наиболее эффективен при поиске наибольших по модулю собственных чисел. Поэтому при его использовании исходная матрица предварительно преобразуется таким образом, чтобы наиболее важные с точки зрения устойчивости собственные числа, имеющие наибольшую мнимую часть, становились наибольшими по модулю. Это преобразование представляет собой комбинацию сдвига и обращения матрицы (*shift-invert approach*).

В настоящей работе для численного решения задачи на собственные значения использовалась неявно перезапускаемая версия метода Арнольди в сочетании с уже упомянутым подходом *shift-invert*, реализованные в библиотеках *Petsc/Slepc* [393], а для LU разложения использовалась библиотека *MUMPS*. Для большинства задач использовалось от 64 до 128 векторов Арнольди,

количество искомым собственным чисел составляло от 6 до 12, а итерации считались сошедшими, когда критерий сходимости был меньше 10^{-8} .

Большинство расчетов проводилось кластере Политехнического университета «Торнадо», каждый узел которого содержит два процессора Intel Xeon (E5-2697v3, 28 ядер, 2.60ГГц) и 64 гигабайта оперативной памяти.

При проведении анализа устойчивости наиболее «узким» местом является необходимая для расчета оперативная память, которая зависит от размера матрицы S и количества MPI процессов, используемых в расчете. Как видно из Табл. 7, где приведены вычислительные затраты, используемые для решения типичных двумерных и трехмерных задач, применение трехмерного анализа устойчивости возможно только на сравнительно скромных (1 - 2 миллиона узлов) сетках, причем даже на таких сетках затраты оперативной памяти оказываются очень большими.

Что касается более сложных трехмерных течений, для расчета которых требуются сетки в десятки миллионов узлов, то для анализа их устойчивости необходима оперативная память объемом в сотни терабайт. В настоящее время такая память доступна только на самых мощных суперкомпьютерах.

Табл. 7. Вычислительные затраты, требуемые для расчета типичных задач анализа устойчивости.

| Тип расчета | Число узлов сетки, млн | Размерность матрицы | Число используемых узлов кластера | Используемая оперативная память, терабайты | Время расчета, часы |
|-------------|------------------------|---------------------|-----------------------------------|--|---------------------|
| 2D | 0.085 | $5 \cdot 10^5$ | 2 | 0.1 | 0.2 |
| 3D | 1.1 | $7 \cdot 10^6$ | 32 | 1.42 | 12 |
| 3D | 1.7 | $1 \cdot 10^7$ | 64 | 3.0 | 33 |
| 3D | 2.0 | $1.2 \cdot 10^7$ | 80 | 3.84 | 60 |

5.3. ВЕРИФИКАЦИЯ, ВАЛИДАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Верификация описанных в предыдущем разделе методов анализа устойчивости осуществлялась путем сравнения результатов, полученных с их помощью, с аналогичными результатами известными из литературы и с результатами решения нестационарных уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса.

Что касается валидации методов анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса, то есть оценки возможности предсказания с их помощью устойчивости реальных

турбулентных течений, то для этой цели проводилось сравнение полученных с их использованием результатов с известными из литературы результатами экспериментов и прямого численного моделирования.

5.3.1. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ НА ПРИМЕРЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В данном разделе приведены результаты верификации разработанной методики и соответствующего программного обеспечения применительно к анализу устойчивости ламинарных течений различных типов.

5.3.1.1. Неустойчивость Толлмина-Шлихтинга в плоском канале

Постановка задачи

Рассматривается развитое ламинарное течение в плоском канале (течение Пуазейля) при числе Рейнольдса, построенном по максимальной скорости U_{max} и полувысоте канала h , равном $Re = h \cdot U_{max} / \nu = 10^4$. Известно (см., например, [394]), что при таком числе Рейнольдса возникает неустойчивость Толлмина-Шлихтинга с периодом в продольном направлении около $2\pi h$.

В настоящей работе данная задача рассматривалась в двумерной постановке. Длина расчетной области составляла $L_x = 10\pi h$, а граничные условия в этом направлении были периодическими (размер сетки составлял 150×137).

Анализ устойчивости проводился как в несжимаемой постановке задачи, так и в сжимаемой (при числе Маха $M_0 = 0.1$). Результаты расчетов сравнивались результатами решения нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса, полученными на той же сетке, и с решением уравнений Орра-Зоммерфельда [394].

Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса

В качестве начальных условий для нестационарного расчета, который проводился с шагом интегрирования по времени $\Delta t = 0.067 \cdot h / U_{max}$, использовалось численное решение стационарных уравнений Навье-Стокса.

Результаты этого расчета показали, что с течением времени в потоке развиваются периодические возмущения (Рис. 210) с экспоненциально возрастающей амплитудой, а безразмерные частота и показатель роста этих возмущений равны $\omega_r = 0.2375$ и $\omega_i = 3.74 \cdot 10^{-3}$, соответственно.

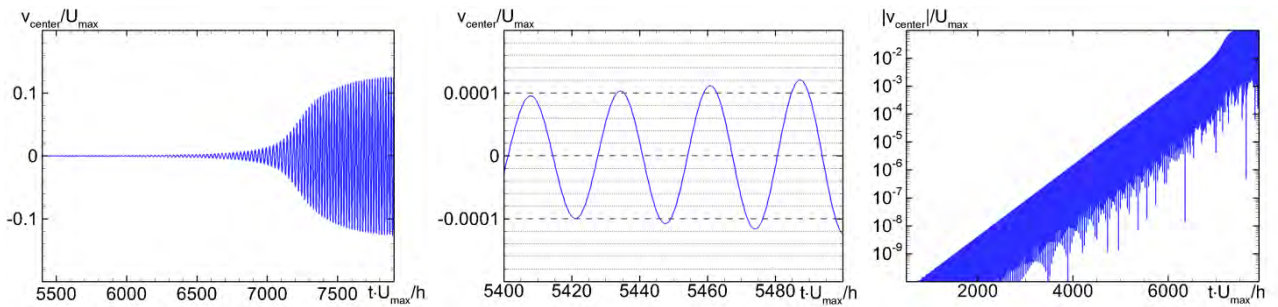


Рис. 210. Зависимость поперечной скорости в центре канала от безразмерного времени в линейном и логарифмическом масштабе.

Результаты линейного анализа устойчивости

Собственные числа с положительной вещественной частью, полученные в результате анализа устойчивости, представлены в Табл. 8. Видно, что при использовании несжимаемой постановки задачи устойчивости эти числа совпадают с решением нестационарных уравнений Навье-Стокса, что свидетельствует о корректности разработанного алгоритма и программного обеспечения для проведения линейного анализа устойчивости применительно к рассматриваемому течению. В пользу этого вывода говорит также то, что относительное (отнесенное к модулю комплексного собственного числа ω) различие показателей роста ω_i и частоты ω_r возмущений, полученных в настоящей работе и на основе решения уравнений Орра-Зоммерфельда [394], составляет всего 0.3%. Наконец, относительное различие показателей роста и частоты возмущений, полученных в настоящей работе с использованием сжимаемой и несжимаемой постановок задачи об анализе устойчивости, составляет примерно 1%, что согласуется с общепринятой оценкой влияния эффектов сжимаемости (пропорционально M^2).

Табл. 8. Результаты исследования устойчивости течения Пуазейля, полученные различными подходами.

| Подход | Показатель роста ω_i | Частота ω_r |
|---|-----------------------------|--------------------|
| Решение уравнений Орра-Зоммерфельда [394] | $3.74 \cdot 10^{-3}$ | 0.2375 |
| Нестационарное решение несжимаемых уравнений Навье-Стокса | $2.95 \cdot 10^{-3}$ | 0.2375 |
| Несжимаемый анализ устойчивости | $2.95 \cdot 10^{-3}$ | 0.2375 |
| Сжимаемый анализ устойчивости | $3.80 \cdot 10^{-3}$ | 0.2400 |

5.3.1.2. Неустойчивость обтекания прямоугольной каверны на плоской поверхности

Постановка задачи

Рассматривается обтекание прямоугольной каверны на плоской поверхности, вдоль которой развивается ламинарный пограничный слой (Рис. 211). Число Рейнольдса, построенное по

толщине вытеснения этого пограничного слоя в начале каверны δ^* и скорости внешнего потока U_∞ , составляет $Re_{\delta^*} = \delta^* U_\infty / \nu = 700$, а число Маха набегающего потока $M_\infty = 0.1$. Глубина каверны H и ее длина L составляли $4\delta^*$ до $30\delta^*$, соответственно.

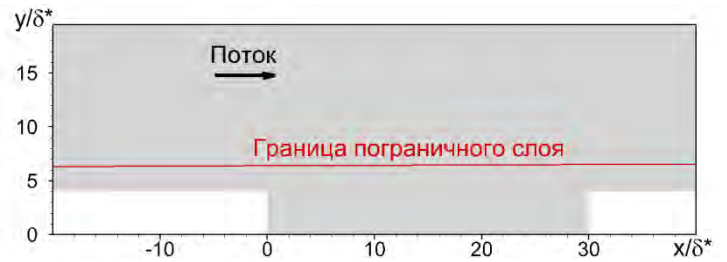


Рис. 211. Схема обтекания прямоугольной каверны.

Размер расчетной области по продольной координате составлял $675\delta^*$ (от $x = -415\delta^*$ до $x = 260\delta^*$), а каверна располагалась при $0 < x < 30\delta^*$. На входной границе расчетной области задавался однородный поток. При этом для обеспечения требуемой толщины пограничного слоя в начале каверны (при $x = 0$) на отрезке стенки $x < -276\delta^*$ задавались условия свободного проскальзывания, а далее вниз по потоку – условия прилипания и адиабатичности. Размер расчетной области по поперечной координате составлял $800\delta^*$ и на ее верхней границе использовались условия симметрии.

В расчетах использовалась неравномерная сетка со сгущением в окрестности сечения, где происходит переключение с условий свободного скольжения на условия прилипания ($x = -276\delta^*$) и в области каверны (максимальный шаг не превышает $0.06\delta^*$) (Рис. 212). Общий размер сетки составлял 843×183 (около 150 тысяч узлов).

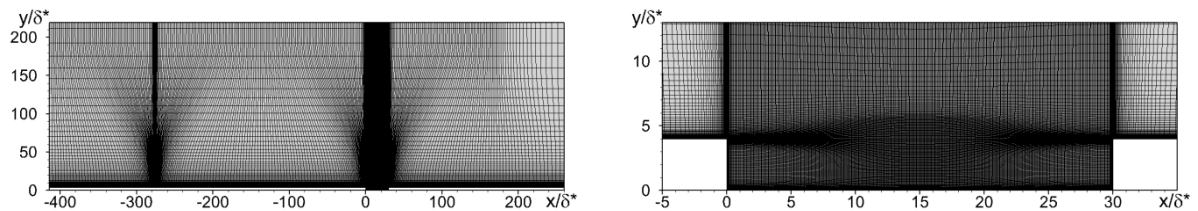


Рис. 212. Расчетная сетка во всей области и ее фрагмент в области каверны.

Результаты анализа устойчивости сравнивались с решением нестационарных уравнений Навье-Стокса, полученным на той же сетке.

Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса

В качестве начальных условий для нестационарного расчета использовалось численное решение стационарных уравнений Навье-Стокса. Шаг интегрирования по времени был равен $\Delta t = 0.04\delta^* / U_\infty$, что обеспечивало величину числа Куранта в окрестности каверны $CFL < 1$ (результаты одного из расчетов, выполненного с уменьшенным в 10 раз шагом интегрирования, не выявили каких-либо отличий двух решений на участке линейного роста возмущений).

Расчеты показали, что с течением времени в слое смешения, отрывающемся от передней кромки каверны, развиваются периодические возмущения с экспоненциально возрастающей амплитудой (Рис. 213), что позволило определить их показатель роста и частоту: $\omega_i = 3.22 \cdot 10^{-4}$ и $\omega_r = 5.15 \cdot 10^{-2}$.

Результаты линейного анализа устойчивости

Анализ устойчивости показал, что собственное число с положительной вещественной частью хорошо согласуется с результатом решения нестационарных уравнений Навье-Стокса (относительное различие соответствующих показателей роста и частоты возмущений составляет менее 1% - см. Табл. 9)³¹.

Табл. 9. Сравнение результатов анализа устойчивости с нестационарным решением уравнений Навье-Стокса.

| Метод | Показатель роста ω_i | Частота ω_r |
|---|-----------------------------|----------------------|
| Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса | $3.22 \cdot 10^{-4}$ | $5.15 \cdot 10^{-2}$ |
| Анализ устойчивости | $3.42 \cdot 10^{-4}$ | $5.11 \cdot 10^{-2}$ |

5.3.1.3. Неустойчивость ламинарного слоя Экмана

Экмановским слоем называется равновесный (характеристики потока не изменяются вдоль поверхности) пограничный слой, возникающий при наличии вращения, в котором за счет действия силы Кориолиса вектор скорости поворачивается по мере удаления от твердой поверхности (Рис. 214). В диссертации рассматривается частный случай, в котором ось вращения совпадает с перпендикуляром к поверхности (осью z).

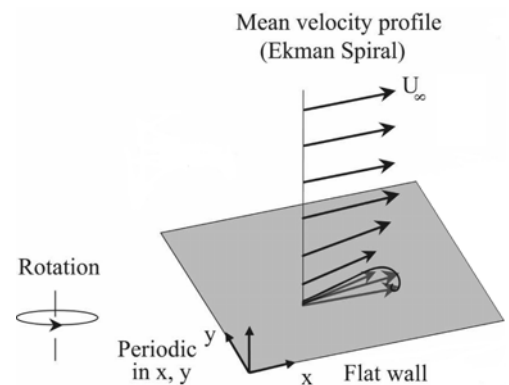


Рис. 214. Схема Экмановского слоя (из [395]).

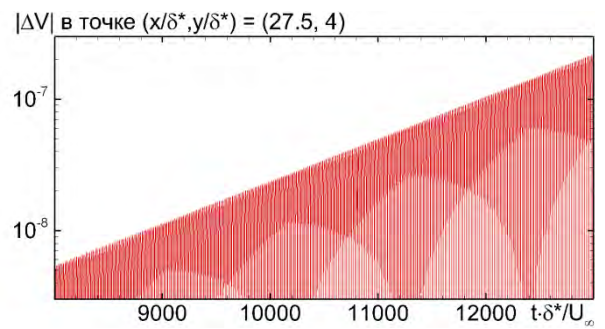


Рис. 213. Рост возмущений поперечной скорости в точке с координатами $(27.5\delta^*, 4\delta^*)$.

³¹ Незначительное занижение показателя роста возмущений, полученного на основе анализа линейной стадии решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, характерно для многих течений и объясняется, по-видимому, появлением дополнительной численной диссипации при решении нестационарных уравнений движения.

Неустойчивость экмановского слоя впервые была обнаружена в 1963 году в ходе экспериментов, проводившихся Фаллером [396]. Численные исследования устойчивости слоя Экмана, выполненные в 1960е годы с использованием уравнений Орра-Зоммерфельда (см., например, [397] - [399]), позволили выявить два типа неустойчивости (Табл. 10). Возникающие при этом возмущения однородны в одном из направлений (угол между этим направлением и геострофическим потоком, то есть направлением вектора скорости около поверхности обычно обозначается через ε)³².

Табл. 10. Типы неустойчивости экмановского слоя.

| | Тип неустойчивости | Критическое число Рейнольдса | Угол между однородным направлением и геострофическим потоком ε |
|-------|--|------------------------------|--|
| Тип 1 | Невязкая неустойчивость поперечного потока | 112 | $\sim 10^\circ$ |
| Тип 2 | Вязко-невязкая неустойчивость Толлмина-Шлихтинга | 55 | $\sim 20^\circ$ |

Постановка задачи и результаты линейного анализа устойчивости

В диссертации представлены результаты расчетов экмановского слоя при числе Маха внешнего потока $M_\infty = 0.1$ и числе Рейнольдса $Re = GD/\nu$, построенном по скорости внешнего потока G и линейному масштабу $D = \sqrt{\nu/\Omega_k}$ (Ω_k - скорость вращения), равном 150. Для рассматриваемого числа Рейнольдса отношение толщины пограничного слоя к масштабу длины составляет $\delta/D \approx 5.54$.

Поскольку экмановский слой является равновесным, базовое решение может быть найдено в «одномерной» постановке, при использовании которой параметры потока зависят только от нормальной к стенке координаты z . Размер расчетной области в этом направлении составлял $40D$ (примерно 7δ). Расчетная сетка имела 662 узла и сгущалась по направлению к стенке. Максимальный шаг сетки Δ_{max} составлял около $0.061D$ ($\approx 0.011\delta$).

Анализ устойчивости проводился в квазитрехмерной постановке задачи с учетом силы Кориолиса. При этом варьировались два свободных параметра, а именно угол между однородным

³² Позднее в работе Мака [400] была открыта неустойчивость третьего типа (так называемая абсолютная неустойчивость), которая в сочетании с неустойчивостью первого типа приводит к ламинарно-турбулентному переходу [401].

направлением и геострофическим потоком ε и волновое число, определяющее длину волны возникающих возмущений $\beta = 2\pi D/\lambda_y$. В качестве базового решения для анализа устойчивости использовалось численное решение стационарных сжимаемых уравнений Навье-Стокса.

В результате была получена так называемая «карта устойчивости» (Рис. 215), на которой отчетливо видны области неустойчивости двух типов. Значения параметров ε и β , при которых наблюдаются максимальные значения показателя роста для обоих типов неустойчивости, представлены в Табл. 11.

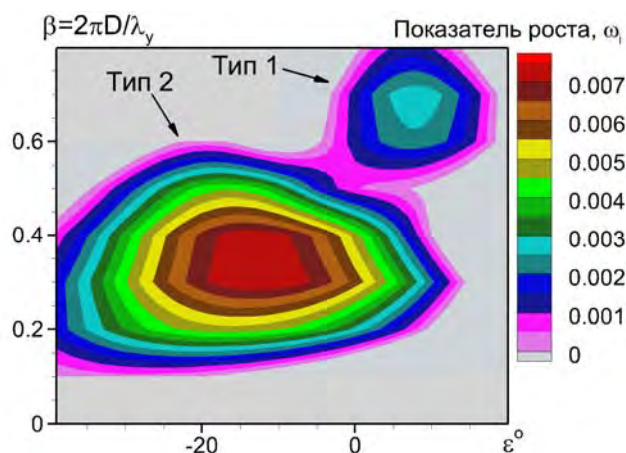


Рис. 215. «Карта устойчивости» - зависимость показателя роста от угла ε и волнового числа β .

Табл. 11. Режимы, при которых была проведена верификация анализа устойчивости.

| № | Режим | Волновое число $\beta = 2\pi D/\lambda_y$ | Угол между однородным направлением и геострофическим потоком ε |
|---|----------------------------------|--|--|
| 1 | Наибольшая неустойчивость типа 1 | 0.696 | 7.94° |
| 2 | Наибольшая неустойчивость типа 2 | 0.342 | -12.37° |

Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса и их сравнение результатами линейного анализа устойчивости.

Нестационарные расчеты проводились в квазитрехмерной постановке. Размер расчетной области в поперечном направлении y был равен длине волны возмущений для соответствующего режима.

Расчетная сетка в направлении нормали к стенке совпадала с сеткой, использовавшейся для анализа устойчивости, а в поперечном направлении была равномерной с шагом равным максимальному шагу по нормали Δ_{max} . Общий размер сетки составил примерно 130 тысяч узлов.

В качестве начальных условий для нестационарного расчета использовалось однородное в поперечном направлении стационарное решение. Шаг по времени был равен $\Delta t = 0.1D/G$.

В результате расчетов, выполненных при значениях параметров ε и β из Табл. 11, были получены нестационарные решения, на линейном участке которых амплитуда возмущений экспоненциально возрастала во времени (Рис. 216). Извлеченные из этих решений показатели роста и

частоты для двух типов неустойчивости оказались равными ($2.25 \cdot 10^{-3}$, $4.62 \cdot 10^{-2}$) и ($6.39 \cdot 10^{-3}$, $1.24 \cdot 10^{-1}$), соответственно.

Сравнение результатов нестационарных расчетов и анализа устойчивости показало, что эти результаты хорошо согласуются между собой как по значениям показателя роста и частоты возмущений (их различие не превышает 0.5% - см. Табл. 12), так и по форме возмущений обоих типов (Рис. 217).

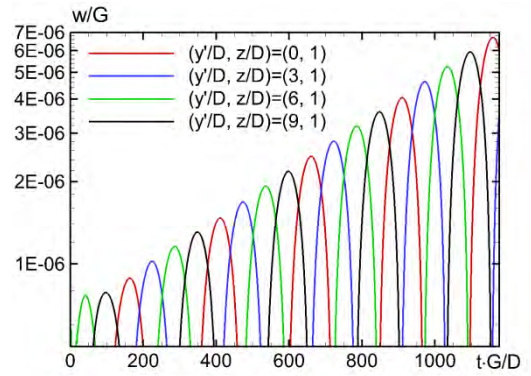


Рис. 216. Пример изменения нормальной к поверхности компоненты скорости при решении нестационарных уравнений Навье-Стокса (режима 1).

Табл. 12. Сравнение показателя роста и частоты возмущений, полученных с помощью анализа устойчивости и при решении нестационарных уравнений Навье-Стокса.

| № режима | Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса | | Анализ устойчивости | |
|----------|---|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| | Показатель роста ω_i | Частота ω_r | Показатель роста ω_i | Частота ω_r |
| 1 | $2.25 \cdot 10^{-3}$ | $4.62 \cdot 10^{-2}$ | $2.38 \cdot 10^{-3}$ | $4.63 \cdot 10^{-2}$ |
| 2 | $6.39 \cdot 10^{-3}$ | $1.24 \cdot 10^{-1}$ | $6.39 \cdot 10^{-3}$ | $1.24 \cdot 10^{-1}$ |

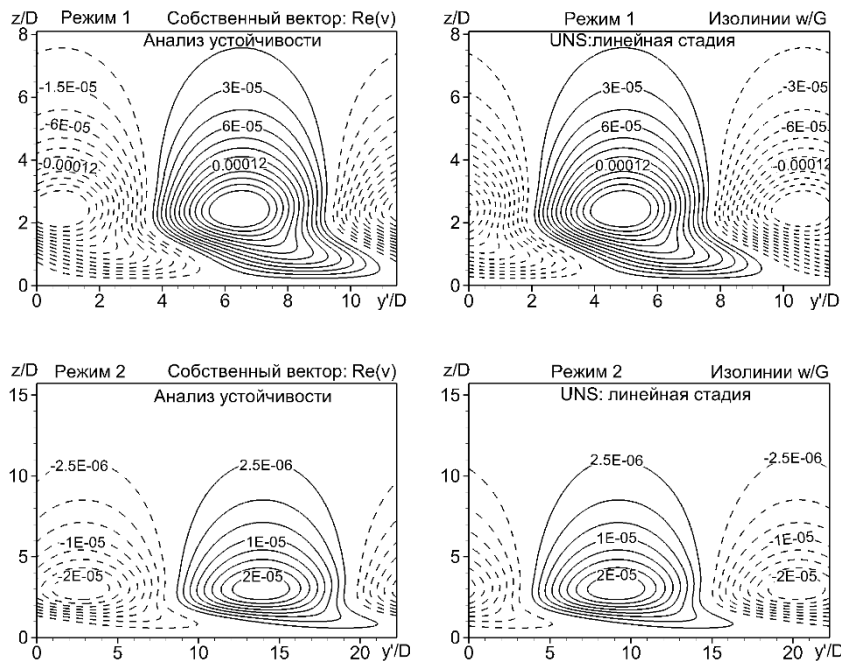


Рис. 217. Контуры вертикальной компоненты скорости, полученные из анализа устойчивости (левая колонка) и на линейной стадии решений нестационарных уравнений Навье-Стокса (правая колонка) для режимов 1 (верхний ряд) и 2 (нижний ряд).

5.3.1.4. Неустойчивость следа круглого цилиндра постоянного диаметра

В этом течении реализуется неустойчивость фон Кармана – классический тип неустойчивости, наблюдаемой при обтекании плохообтекаемых тел. Применительно к рассматриваемому течению она хорошо изучена как с применением ЛТУ, так и на основе решения нестационарных уравнений Навье-Стокса (см., например, [402], [403]).

Постановка задачи

Расчеты проводились при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 0.2$ и числах Рейнольдса $Re = U_\infty D/\nu$, в диапазоне от 40 до 100 (U_∞ - скорость набегающего потока, D - диаметр цилиндра).

Расчетная область представляла собой круг радиусом $125D$ (Рис. 218). На стенке цилиндра использовались граничные условия прилипания и адиабатичности, а на внешней границе – характеристические граничные условия. Сетка размером 240×240 узлов была однородной в азимутальном направлении, а в радиальном сгущалась вблизи поверхности цилиндра. Дополнительные расчеты на различных сетках (см. ниже) показали, что эта сетка достаточна для получения независимого от сетки решения.

Полученное с помощью линейного анализа устойчивости решение сравнивалось с результатами решения нестационарных уравнений Навье-Стокса.

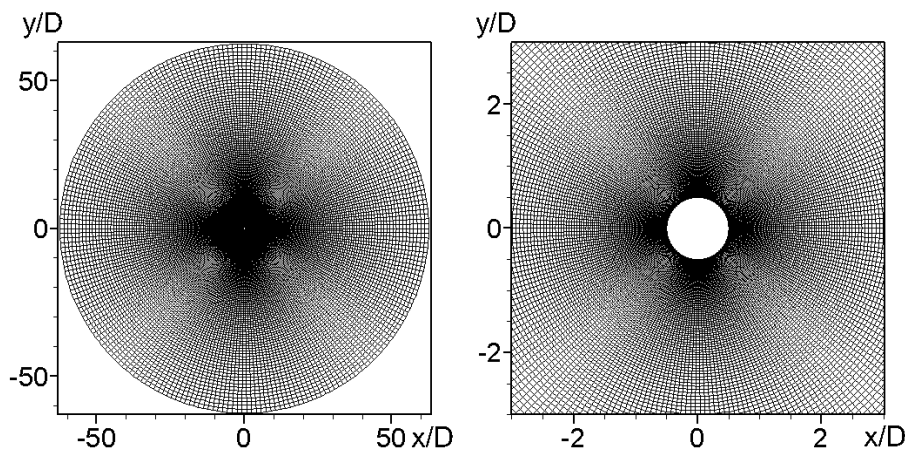


Рис. 218. Расчетная область и сетка, использовавшиеся при решении задачи об устойчивости ламинарного обтекания цилиндра.

Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса

В качестве начальных условий для нестационарного расчета использовались численные решения стационарных уравнений Навье-Стокса, а шаг по времени был равен $\Delta t = 0.01 \cdot D/U_\infty$, что обеспечивало величину числа Куранта $CFL < 1$ во всей области.

Как видно из Рис. 219, на котором в качестве примера представлен характер изменения во времени поперечной составляющей вектора скорости потока при $Re = 50$ в точке, находящейся в

плоскости симметрии следа, на начальной (линейной) стадии нестационарного решения наблюдается развитие строго периодических возмущений с экспоненциально нарастающей амплитудой. Аналогичная ситуация наблюдается и при числе Рейнольдса равном 70. Это позволяет извлечь из полученных решений показатель роста и частоту возмущений, величины которых представлены в Табл. 13. Из нее видно, что с ростом числа Рейнольдса показатель скорости роста возмущений существенно возрастает, а их частота меняется относительно слабо.

Табл. 13. Показатель роста и частота колебаний, полученные из решений нестационарных уравнений Навье-Стокса на начальном участке.

| Число Рейнольдса | Показатель роста ω_i | Частота ω_r |
|------------------|-----------------------------|--------------------|
| Re = 50 | 0.0096 | 0.731 |
| Re = 70 | 0.067 | 0.739 |

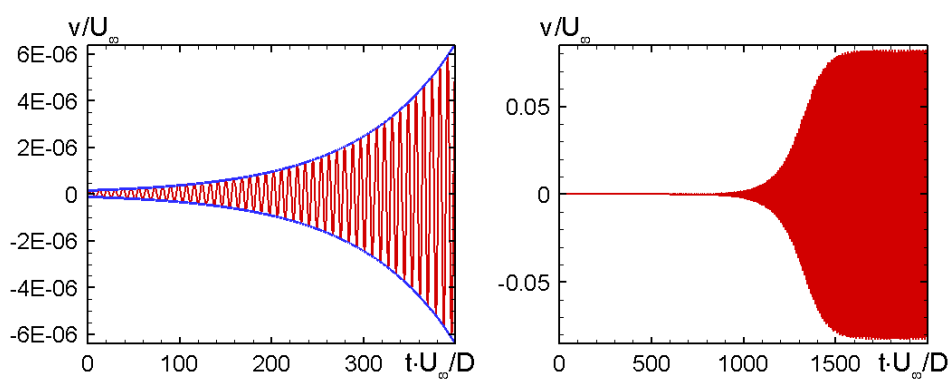


Рис. 219. Зависимость поперечной скорости в точке $(x/D, y/D) = (2.0, 0.0)$ от времени при $Re=50$: линейный участок (слева) и выход на установившиеся колебания (справа).

Результаты линейного анализа устойчивости

В качестве базового решения при проведении линейного анализа устойчивости использовалось численное решение стационарных уравнений Навье-Стокса.

Результаты предварительных расчетов, выполненных на последовательно измельченных сетках при $Re = 60$ (см. Табл. 14) показали, что сетка 240×240 является вполне достаточной для получения практически независимого от сетки собственного числа. Кроме того, было установлено, что влияние на полученные результаты размера расчетной области при его увеличении с $125D$ до $200D$ является пренебрежимо малым.

Наконец, приведенное в Табл. 15 и на Рис. 220 сравнение результатов анализа устойчивости при $Re = 50$, выполненного в полной области и в ее половине с использованием антисимметричных граничных условий (5.25) показало, что эти результаты слабо отличаются друг от друга, что оправдывает использование таких граничных условий при анализе устойчивости рассматриваемого течения.

Табл. 14. Влияние размеров расчетной сетки на показатель роста и частоту колебаний для обтекания цилиндра при $Re = 60$.

| Сетка | Показатель роста ω_i | Частота ω_r |
|---------|-----------------------------|--------------------|
| 80×80 | 0.0331 | 0.7603 |
| 160×160 | 0.0424 | 0.7432 |
| 240×240 | 0.0434 | 0.7399 |
| 320×320 | 0.0437 | 0.7388 |
| 400×400 | 0.0439 | 0.7383 |

Табл. 15. Сравнение собственных чисел, полученных при расчете в полной области и в половине области с использованием условий (5.25) при $Re = 50$.

| Тип расчета | Показатель роста ω_i | Частота ω_r |
|---------------------------|-----------------------------|--------------------|
| Расчет в полной области | 0.011 | 0.729 |
| Расчет в половине области | 0.012 | 0.746 |

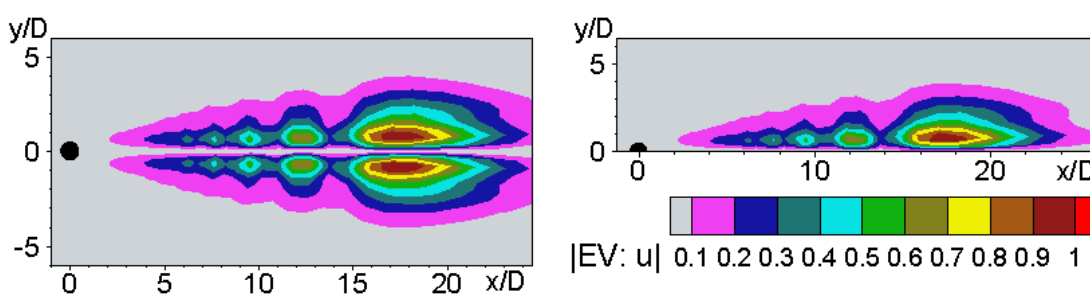


Рис. 220. Поля u -компоненты амплитуды собственного вектора, рассчитанные в полной (слева) и половинной (справа) областях при $Re = 50$.

Сравнение зависимостей показателя роста и частоты наиболее неустойчивого собственного числа от числа Рейнольдса, полученных в результате линейного анализа устойчивости, с соответствующими результатами, основанными на обработке линейной стадии нестационарных уравнений Навье-Стокса, показано на Рис. 221. Из него видно, что результаты обоих подходов практически совпадают. При этом критическое значение числа Рейнольдса (соответствующее потере устойчивости следа) равно 47 и хорошо согласуется с экспериментальными и расчетными данными, известными из литературы [403] - [405].

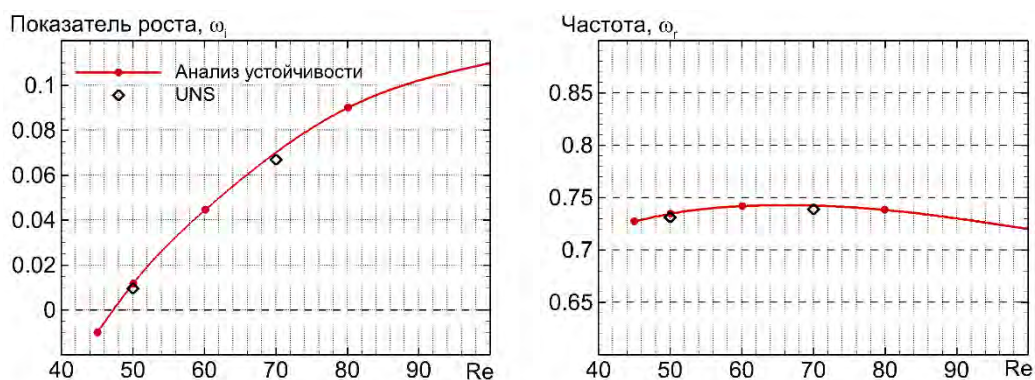


Рис. 221. Сравнение зависимостей показателя роста и частоты наиболее неустойчивых возмущений от числа Рейнольдса, полученных из анализа устойчивости и из решений нестационарных уравнений Навье-Стокса.

Для верификации разработанной методики линейного анализа устойчивости квазитрехмерных решений уравнений Навье-Стокса рассмотренная выше задача была решена для случая обтекания цилиндра под ненулевым углом скольжения $\Lambda = 30^\circ$ (при наличии стреловидности), схема которой приведена на Рис. 222.

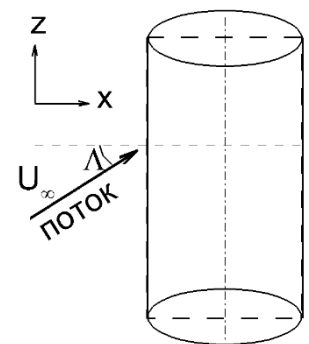


Рис. 222. Схема обтекания цилиндра под углом скольжения.

Сравнение показателя роста и частоты, полученных с помощью квазитрехмерного анализа устойчивости в предположении об однородности возмущений вдоль оси z (при равенстве нулю параметра β), с соответствующими результатами, полученными на основе решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, показало, что они хорошо совпадают. Кроме того, оказалось, что в обоих случаях рассматриваемое течение теряет устойчивость при числе Рейнольдса $Re_c^{U_\infty}$, построенном по модулю скорости набегающего потока U_∞ , равном 54. Это означает, что критическое число Рейнольдса $Re_c^{U_n} = Re_c^{U_\infty} \cdot \cos(30^\circ)$, построенное по нормальной к оси цилиндра компоненте скорости набегающего потока U_n , равно 47, то есть совпадает с критическим числом Рейнольдса для обтекания цилиндра под нулевым углом скольжения.

5.3.1.5. Неустойчивость следа трехмерного цилиндра переменного диаметра

Данная задача была использована для верификации полной трехмерной версии разработанной методологии линейного анализа устойчивости.

Постановка задачи

Рассматривается ламинарное обтекание трехмерного цилиндра переменного сечения (Рис. 223), диаметр которого изменяется вдоль его оси по гармоническому закону $D = D_0 - D_1 \cos(2\pi z/\lambda)$. При этом отношение амплитуды изменения диаметра к его среднему значению D_1/D_0 и безразмерная длина волны λ/D_0 полагались равными 0.25 и 75, соответственно, а угол стреловидности Λ задавался равным 5° .

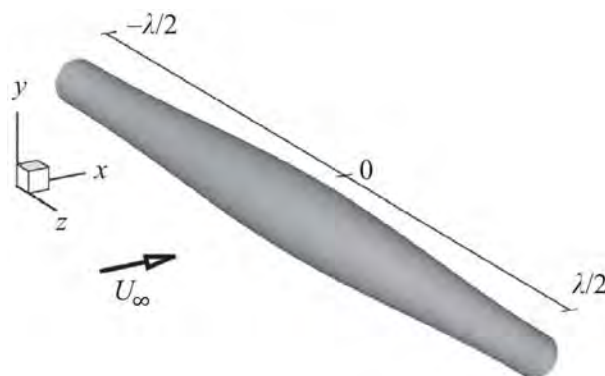


Рис. 223. Схема обтекания цилиндра переменного сечения.

Как и в случае цилиндра постоянного диаметра, расчеты проводились при числе Маха $M_\infty = 0.2$. Диаметр внешней границы расчетной области составлял $120D_0$, а ее размер в трансверсальном направлении z задавался равным одной длине волны λ .

Используемая для решения уравнений Навье-Стокса расчетная сетка О-типа была равномерной в азимутальном и трансверсальном направлениях и сгущалась по направлению к твердой поверхности в радиальном направлении. Общий размер сетки составил $160 \times 200 \times 96$ в азимутальном, радиальном и трансверсальном направлениях, соответственно. На стенке использовались граничные условия прилипания и адиабатичности, на внешней границе расчетной области – характеристические условия, а на ее границах в трансверсальном направлении – условия периодичности.

Результаты проведенного анализа устойчивости сравнивались с результатами решения нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса.

Решение нестационарных уравнений Навье-Стокса

В качестве начальных условий для нестационарного расчета использовалось численное решение трехмерных стационарных уравнений Навье-Стокса (Рис. 224). Шаг интегрирования по времени был равен $\Delta t = 0.01D/U_\infty$, что обеспечивало величину числа Куранта $CFL < 1$ во всей области. Серия таких расчетов, выполненная при разных числах Рейнольдса $Re = U_\infty D_0 / \nu$, позволила получить зависимость показателя скорости от числа Рейнольдса (Рис. 225) и установить его критическое (соответствующее потере устойчивости) значение $Re_{crit} = 41.3$, а также частоту возникающих возмущений $\omega_r = 0.5836$.

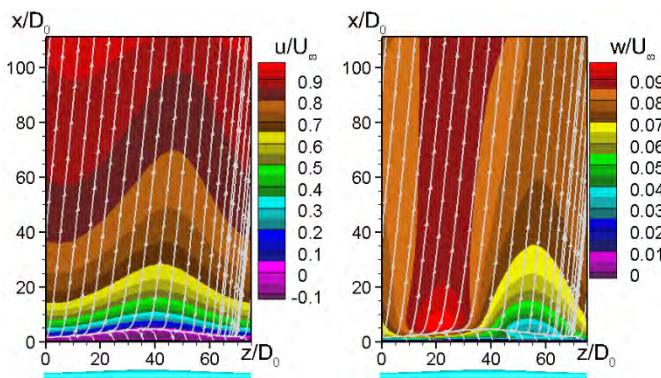


Рис. 224. Поля продольной и трансверсальной компонент вектора скорости из стационарного решения уравнений Навье-Стокса в плоскости XZ при $Re=42$.

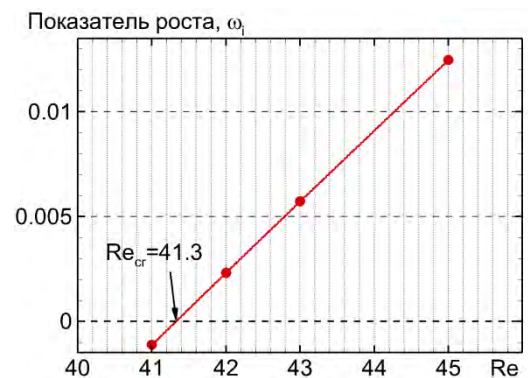


Рис. 225. Зависимость показателя роста возмущений от числа Рейнольдса, полученная из анализа линейной стадии решений уравнений Навье-Стокса.

Результаты трехмерного анализа устойчивости

Как уже отмечалось (см. раздел 5.2.2), для проведения трехмерного анализа устойчивости требуется большой объем оперативной памяти компьютера, который быстро увеличивается с ростом размера используемой вычислительной сетки. В связи с этим, проведение такого анализа на сетке с размером около 3 миллионов узлов, на которой были выполнены расчеты в рамках трехмерных стационарных и нестационарных уравнений Навье-Стокса, оказалось невозможным.

Вместе с тем, предварительные расчеты показали, что размер сетки для линейного анализа устойчивости без заметного снижения точности может быть значительно уменьшен по сравнению с размером сетки, используемой для получения базового решения. При этом результаты, предсказываемые линейным анализом устойчивости, оказываются очень близкими к

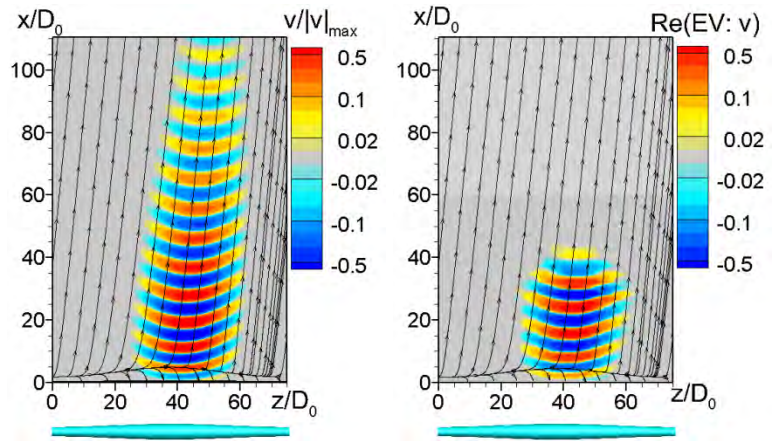


Рис. 226. Сравнение поля u -компоненты вектора скорости в следе за цилиндром, рассчитанного с использованием трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на сетке $160 \times 200 \times 96$ (слева), и с помощью трехмерного анализа устойчивости на сетке $48 \times 87 \times 26$ (справа).

соответствующим результатам, полученным из нестационарных уравнений Навье-Стокса. Этот вывод иллюстрируют Рис. 226 и Рис. 227, на которых сравниваются основные характеристики устойчивости возмущений, рассчитанные двумя способами. Данный факт убедительно свидетельствует о правильности реализации разработанного алгоритма и программы для трехмерного линейного анализа устойчивости ламинарных течений.

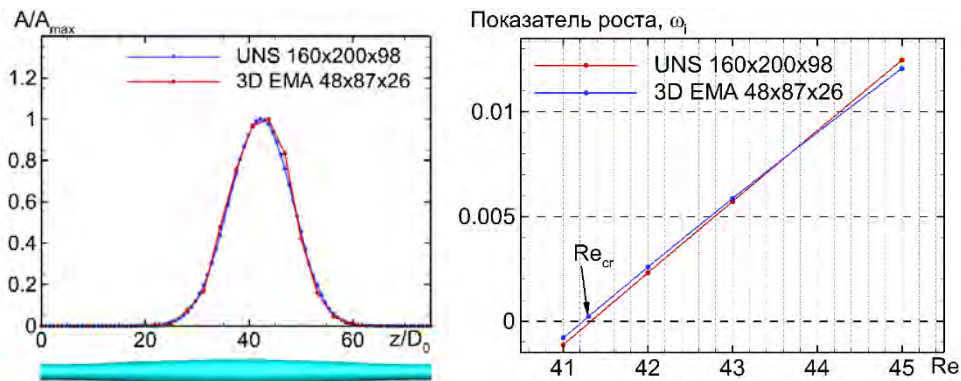


Рис. 227. То же, что на Рис. 226 для продольного распределения амплитуды возмущения вертикальной компоненты скорости в следе за цилиндром при $x/D_0 \approx 1$ (слева) и для зависимости показателя роста возмущений от числа Рейнольдса (справа).

5.3.2. ВЕРИФИКАЦИЯ И ВАЛИДАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ RANS

В настоящем разделе представлены результаты верификации и валидации разработанной методики для линейного анализа устойчивости турбулентных течений.

5.3.2.1. Неустойчивость одномерного турбулентного течения Куэтта

Потеря устойчивости одномерного турбулентного течения Куэтта, проявляющаяся в форме развития в нем продольных вихрей, впервые была обнаружена в работе [406] на основе прямого численного моделирования этого течения. Позже наличие продольных вихревых структур в течении Куэтта было подтверждено в многочисленных расчетных и экспериментальных работах, посвященных данному течению. Аналогичные структуры были обнаружены также при анализе результатов прямого численного моделирования турбулентного течения Куэтта при наличии градиента давления (течение Куэтта-Пуазейля) [287] (Рис. 228).

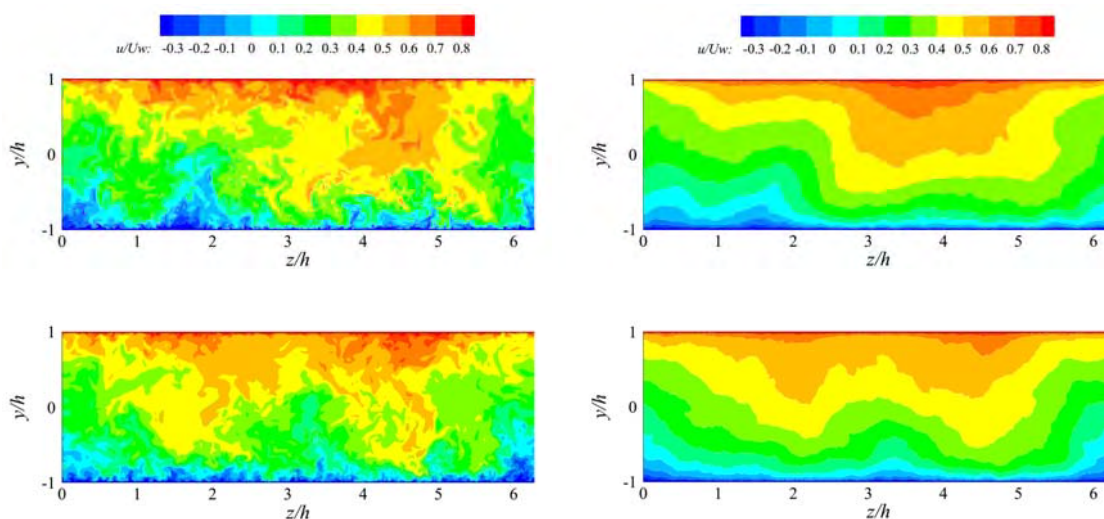


Рис. 228. Мгновенные (слева) и осредненные по продольной координате (справа) поля продольной компоненты скорости, полученные из DNS турбулентного течения Куэтта-Пуазейля (из [287]).

Отметим также, что в работах [407] и [408], выполненных при участии автора, было показано, что наблюдаемые в DNS продольные вихри могут быть предсказаны также в рамках RANS в сочетании с нелинейными моделями турбулентности, в частности, модели SA QCR (Рис. 229).

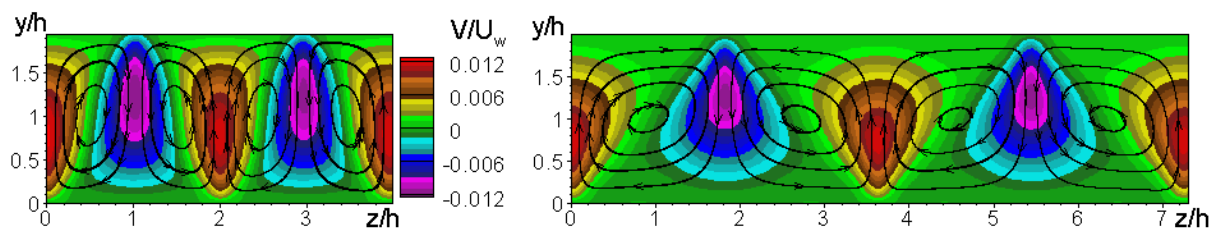


Рис. 229. Линии тока и контуры компоненты скорости V в плоскости YZ , полученные в рамках уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности SA QCR в областях с различным поперечным размером (из [408]).

Постановка задачи

Анализ устойчивости данного течения проводился с использованием квазитрехмерного подхода и модели турбулентности SA QCR. Как и в случае экмановского слоя (см. раздел 5.3.1.3),

предполагалось, что базовое решение зависит только от нормальной к поверхности канала координаты y . На верхней и нижней подвижных стенках канала использовалось граничное условие прилипания с заданным ненулевым значением скорости равным $-U_w$ для нижней стенки и $+U_w$ для верхней. Число Рейнольдса, построенное по полувысоте канала h и скорости стенки U_w , было равно $Re = U_w h / \nu = 10^5$, а число Маха, построенное по скорости U_w , составляло $M_0 = 0.1$.

Результаты анализа устойчивости сравнивались с результатами решения нестационарных уравнений Рейнольдса, полученными в настоящей работе.

Решение нестационарных уравнений Рейнольдса

Нестационарные расчеты проводились в квазитрехмерной сжимаемой ($M_0 = 0.1$) постановке в расчетной области, размер которой в поперечном направлении составлял $L_z = 40h$. По нормали к стенке расчетная сетка совпадала с сеткой, использовавшейся для анализа устойчивости, а в поперечном направлении она была равномерной с шагом, равным максимальному шагу по нормали. Общий размер сетки составлял примерно 180 тысяч узлов.

В качестве начальных условий для нестационарного расчета использовалось численное решение стационарных уравнений Рейнольдса, с наложенными малыми возмущениями (с амплитудой $10^{-8} U_w$) компонент скорости v и w , периодическими по z . Форма возмущений определялась следующими соотношениями

$$w'/U_w = 10^{-8}(1 - z'^2) y', \quad v'/U_w = 10^{-8}(1 - y'^2) z',$$

где - $y' = (y - y_c)/h$, $z' = (z - z_c)/(\Lambda_{z,dist}/4)$ локальные координаты относительно центра вихрей (y_c, z_c), расположенных на расстоянии $\Lambda_{z,dist} = L_z/N$ друг от друга, а N - количество вихрей в расчетной области (Рис. 230). Шаг по времени был равен $\Delta t = 0.01 \cdot h/U_w$.

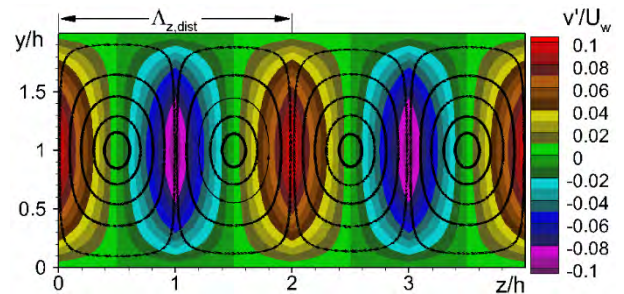


Рис. 230. Пример поля возмущения поперечной составляющей вектора скорости с $\Lambda_{z,dist}/h = 2$.

Серия расчетов с разной длиной волны инициирующих возмущений показала, что решение неустойчиво к возмущениям с длиной волны λ_z от $1.4h$ до $3.4h$, а наибольший показатель роста возмущений наблюдается при $\lambda_z/h \approx 2.1$, что соответствует $\beta = 3$ (Рис. 231).

Результаты линейного анализа устойчивости

В качестве базового решения для анализа устойчивости использовалось численное решение стационарных уравнений Рейнольдса.

Сравнение результатов анализа устойчивости, полученных при различных β (что соответствует различным длинам волн λ_z), с результатами решения нестационарных уравнений Рейнольдса свидетельствует о том, что показатель роста возмущений, предсказываемый обоими подходами, является очень близким (Рис. 231).

5.3.2.2. Неустойчивость турбулентного слоя Экмана

Неустойчивость слоя Экмана наблюдается не только при ламинарном (см. раздел 5.3.1.3), но и при турбулентном режиме течения и проявляется в форме устойчивых вихревых структур, направление которых не совпадает ни с внешним, ни с геострофическим потоком (Рис. 232).

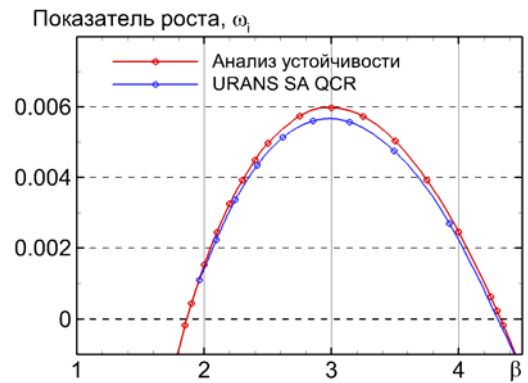


Рис. 231. Зависимость показателя роста возмущений от длины волны, полученная из решения нестационарных уравнений Рейнольдса и из линейного анализа устойчивости.

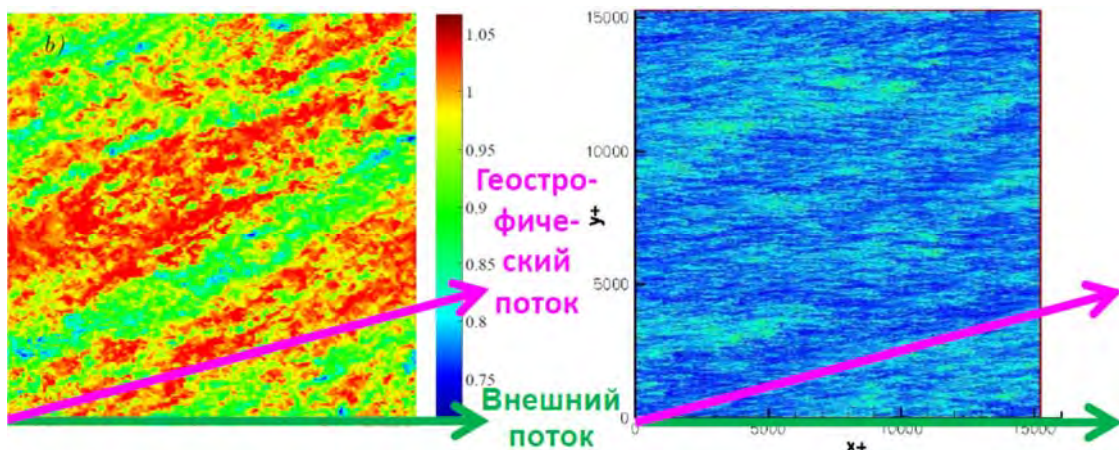


Рис. 232. Мгновенные поля продольной компоненты скорости в плоскости XY, полученные методом DNS при различных числах Рейнольдса. Слева $Re=1600$ (из [409]), справа $Re=2828$ (из [410]).

Постановка задачи

Постановка задачи была подобна постановке, использовавшейся при проведении линейного анализа устойчивости ламинарного экмановского слоя (см. раздел 5.3.1.3); различие состояло лишь в шагах используемой сетки, которая была измельчена к стенке для разрешения вязкого подслоя.

Расчеты проводились при двух числах Рейнольдса, 1600 и 10000. Для замыкания уравнений Рейнольдса использовалась модель Спаларта-Аллмараса с поправкой на кривизну и вращение SARC, которая обеспечивает достаточно высокую точность расчета экмановского слоя как при $Re=1600$ (Рис. 233 и Табл. 16), так и при $Re=10^4$ (Табл. 17).

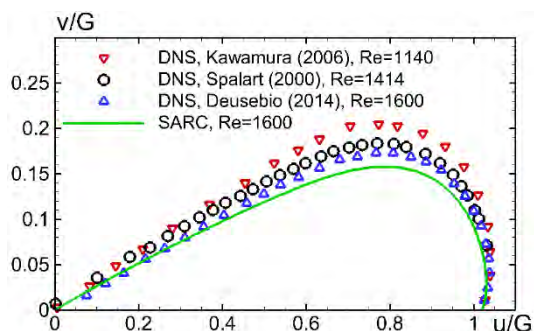


Рис. 233. Сравнение годографа скорости, рассчитанного с использованием модели SARC при $Re=1600$ с результатами прямого численного моделирования [409] - [411].

Табл. 16. Сравнение параметров экмановского слоя рассчитанного с использованием модели SARC с результатами прямого численного моделирования [409] ($Re=1600$)

| | DNS, [409] | SARC |
|--|------------|-------|
| Угол между внешним и геострофическим потоком β | 17.0 | 15.1 |
| Толщина экмановского слоя δ/D | 38.55 | 38.86 |

Табл. 17. Сравнение характеристик решения, полученного с использованием модели SARC, с корреляцией [412] ($Re=10^4$).

| | Корреляция [412] | SARC |
|--|------------------|-------|
| Динамическая скорость $u\tau/G$ | 0.036 | 0.036 |
| Угол между однородным направлением и геострофическим потоком ε | 9.0 | 10.6 |

При $Re = 1600$ было проведено качественное сравнение результатов анализа устойчивости с результатами неявного LES [409], а при $Re = 10^4$ результаты анализа устойчивости сравнивались с решением нестационарных уравнений Рейнольдса. При получении этого решения, как и в разделе 5.3.1.3, размер расчетной области в поперечном направлении L_y был равен извлеченной из анализа устойчивости длине волны возмущений λ_y , а в качестве начального приближения использовалось численное решение стационарных уравнений Рейнольдса.

Результаты анализа устойчивости

В качестве базового решения для анализа устойчивости использовалось численное решение стационарных уравнений Рейнольдса.

На Рис. 234 (слева) показана карта устойчивости, полученная при $Re = 1600$ из серии расчетов при различных длинах волн возмущений λ_y/D и углах между однородным направлением для возмущений и направлением геострофического потока ε . Из нее следует, что наиболее неустойчивый режим наблюдается при значении угла $\varepsilon \approx -33.4^\circ$ и длине волны возмущений $\lambda_y/D \approx 220$. На том же рисунке справа показано мгновенное поле завихренности, полученное методом ILES [409]. Видно, что направление наиболее неустойчивых возмущений согласно анализу

устойчивости, показанное на рисунке красной стрелкой, согласуется с направлением вихревых структур из ILES расчета.

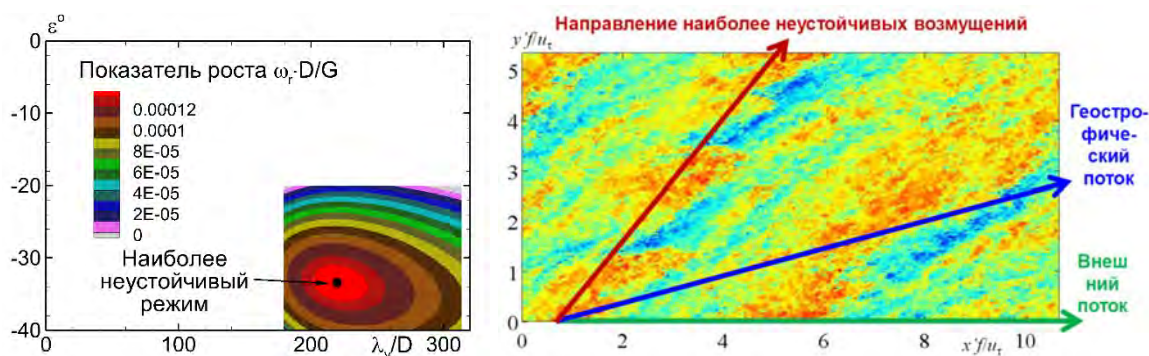


Рис. 234. Карта устойчивости, полученная из анализа устойчивости при $Re=1600$ (слева), и извлеченное из нее направление наиболее неустойчивых возмущений, наложенное на мгновенное поле скорости из ILES расчета [409] (справа).

Карта устойчивости, полученная при числе Рейнольдса $Re=10^4$ (Рис. 235), свидетельствует о том, что в рассматриваемом течении наибольший показатель роста имеют возмущения, характеризующиеся углом по отношению к направлению геострофического потока $\varepsilon = -33.3^\circ$ и длиной волны $\lambda_y/D = 980$.

При параметрах, соответствующих этому режиму, было получено решение нестационарных уравнений Рейнольдса. Анализ этого решения свидетельствует о том, что на его линейной стадии развиваются возмущения с экспоненциально возрастающей амплитудой. При этом величины показателя роста и частоты возмущений, определенные из решения уравнений Рейнольдса и на основе анализа устойчивости (Табл. 18), хорошо согласуются между собой (их относительное различие не превышает 0.5%). То же относится к полям возмущений, полученным двумя методами, показанным на Рис. 236.

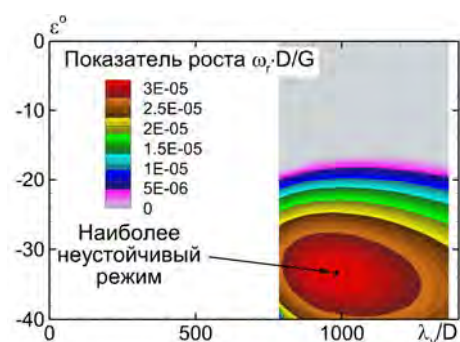


Рис. 235. Карта устойчивости при $Re=10^4$.

Табл. 18. Сравнение результатов анализа устойчивости с решением нестационарных уравнений Рейнольдса на линейной стадии.

| Метод | Показатель роста $\omega_r \cdot \delta/G$ | Частота $\omega_r \cdot \delta/G$ |
|---|--|-----------------------------------|
| Анализ устойчивости | $5.35 \cdot 10^{-3}$ | $7.73 \cdot 10^{-1}$ |
| Решение нестационарных уравнений Рейнольдса | $7.95 \cdot 10^{-3}$ | $7.84 \cdot 10^{-1}$ |

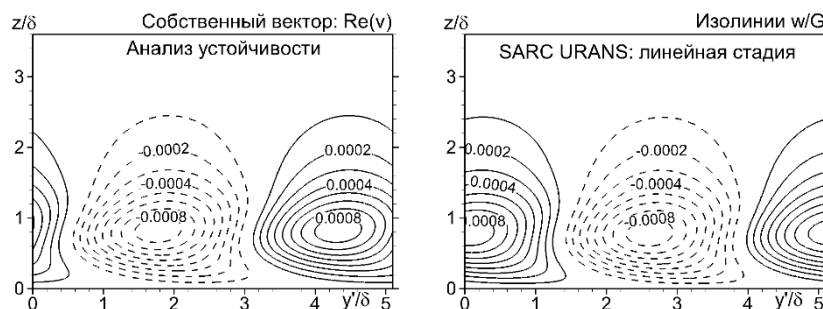


Рис. 236. Контуры вертикальной компоненты скорости, полученные из анализа устойчивости и в рамках нестационарных уравнений Рейнольдса.

5.3.2.3. Возникновение вихревых ячеек при обтекании прямого крыла бесконечного размаха

Как упоминалось в разделе 1.1, при обтекании прямых крыльев под углами атаки, близкими к срыву потока, возникает пространственная неустойчивость течения, приводящая к возникновению вихревых ячеек (*Stall Cells*), что существенно сказывается на аэродинамических характеристиках крыла. В данном разделе демонстрируется возможность предсказания этого явления с использованием линейного анализа устойчивости.

Постановка задачи и результаты линейного анализа устойчивости

Рассматривается турбулентное обтекание разработанного для ветроэнергетики аэродинамического профиля DU-96-W-180 [413] при числе Рейнольдса $Re = 4 \cdot 10^6$, числе Маха $M_\infty = 0.2$ и углах атаки от 13° до 18° .

На внешней границе расчетной области, отстоящей от профиля на расстояние не менее $20c$, использовались характеристические граничные условия. На поверхности профиля использовались условия прилипания и адиабатичности. Расчетная сетка С-типа сгущалась по направлению к поверхности профиля для разрешения вязкого подслоя и в окрестности его передней и задней кромок (Рис. 237).

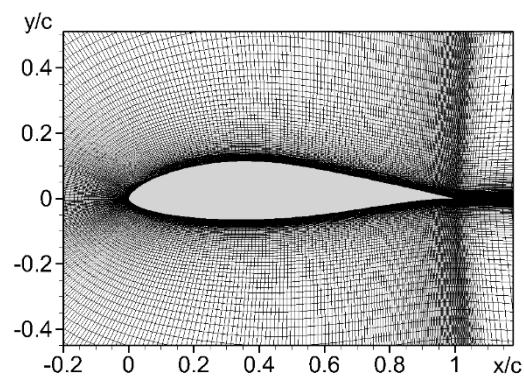


Рис. 237. Сетка в окрестности крылового профиля DU-96-W-180.

Линейный анализ устойчивости проводился в квазитрехмерной постановке с использованием SA модели турбулентности. При этом для каждого из рассмотренных углов атаки была проведена серия расчетов при различных значениях волнового числа β , характеризующего период возмущений в трансверсальном направлении $\lambda_z = 2\pi/\beta$. В качестве базового решения использовалось численное решение стационарных уравнений Рейнольдса.

Полученная в результате этих расчетов карта устойчивости, т.е. зависимость показателя роста от угла атаки и длины волны возмущений, представлена на Рис. 238. Из него видно, что течение теряет устойчивость при угле атаки $\alpha = 14.1^\circ$, а период наиболее неустойчивых возмущений в поперечном направлении составляет $\lambda_z = 0.9c$ ($\beta = 7$).

Решение нестационарных уравнений Рейнольдса и сравнение полученных результатов с результатами линейного анализа устойчивости.

Для верификации квазитрехмерного анализа устойчивости была проведена серия трехмерных стационарных SA RANS расчетов, в которых размер расчетной области в трансверсальном направлении L_z был равен длине волны наиболее неустойчивых возмущений, определенной при анализе устойчивости, т.е. $0.9c$. Расчетная сетка в плоскости XY совпадала с двумерной сеткой, использовавшейся для анализа устойчивости, а сетка по z содержала 50 узлов. Граничные условия по z были периодическими, а на остальных границах они совпадали с граничными условиями, использовавшимися при получении базового двумерного решения.

Результаты расчетов показали, что решение становится трехмерным при углах атаки $\alpha \geq 14^\circ$, причем при $\alpha = 14^\circ$ трехмерность течения выражена очень слабо (Рис. 239). Таким образом, граница устойчивости, предсказываемая в рамках трехмерных уравнений Рейнольдса, близка к 14° , что хорошо согласуется результатами анализа устойчивости (Рис. 240).

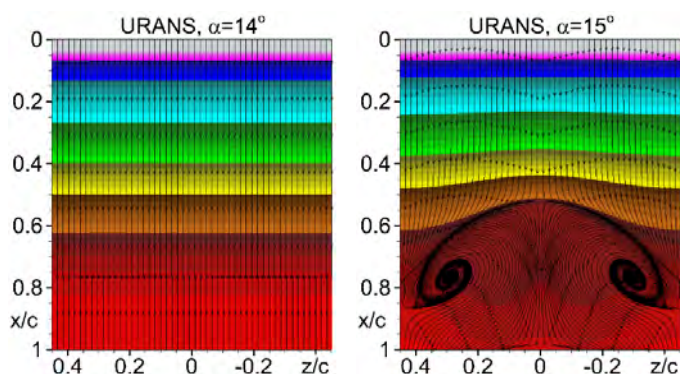


Рис. 239. Поверхностные линии тока и коэффициент давления на верхней поверхности профиля, полученные из трехмерных уравнений Рейнольдса при углах атаки 14° и 15° .

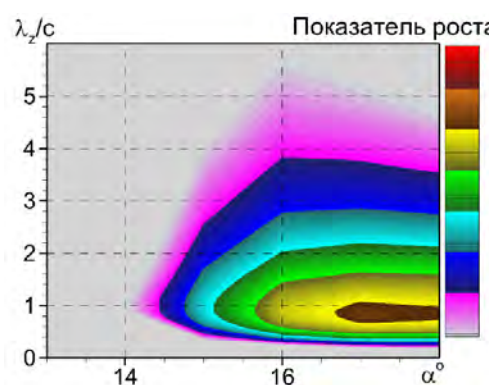


Рис. 238. Карта устойчивости для крылового профиля DU-96-W-180.

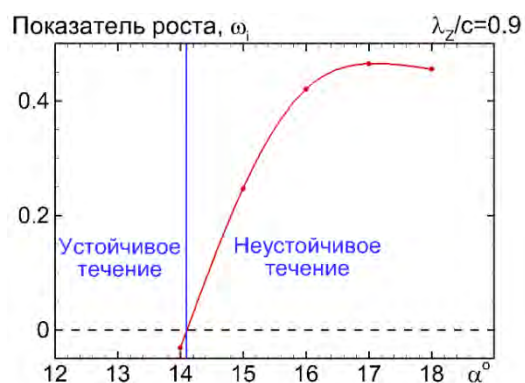


Рис. 240. Сечение карты устойчивости для крылового профиля DU-96-W-180 при $\lambda_z/c = 0.9$.

5.3.3. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАЧАЛА ТРАНСЗВУКОВОГО БАФТИНГА КРЫЛА

При обтекании крыла самолета на трансзвуковых скоростях полета на нем формируется сверхзвуковая зона, замыкаемая скачком уплотнения, взаимодействие которого с пограничным слоем может приводить к отрыву потока. При определенных режимах отрывное течение становится неустойчивым и характеризуется так называемым бафтингом (глобальными колебаниями скачка), что сопровождается появлением значительных динамических нагрузок на поверхность крыла. В последние годы, в связи с увеличением числа Маха и высоты полета гражданских самолетов на крейсерском режиме, проблема бафтинга приобретает все большую актуальность. Это подтверждается большим количеством оригинальных статей (см., например, [414] - [416]), обзоров (см., например, [417]) и монографий (см., например, [418]), посвященных исследованию различных аспектов данной проблемы. При этом, с точки зрения обеспечения безопасности полета, одной из наиболее важных задач является задача определения условий начала бафтинга, т.е. угла атаки и числа Маха, при которых он возникает.

Известный из экспериментов диапазон частот колебаний при бафтинге лежит существенно ниже частот турбулентных пульсаций в пограничном слое на крыле и в следе за ним. Это оправдывает применение нестационарных уравнений Рейнольдса для описания бафтинга, а для предсказания его начала - предложенного в диссертации подхода, базирующегося на линейном анализе устойчивости стационарных решений этих уравнений (см. раздел 5.1). В данном разделе на примерах решения ряда задач о трансзвуковом обтекании прямых и стреловидных крыльев бесконечного размаха демонстрируются широкие возможности, открываемые этим подходом.

5.3.3.1. Обтекание прямого крыла бесконечного размаха

В данном разделе представлен ряд примеров применения разработанной методики для предсказания начала бафтинга на прямом крыле бесконечного размаха с аэродинамическими профилями различной формы (NACA0012 [419], OAT15A [420], RA16SC1 [421] и 18-процентный двояковыпуклый профиль Bi-convex airfoil [422], [423]), показанными на Рис. 241. Выбор для исследования именно этих профилей объясняется, с одной стороны, наличием для них экспериментальных данных, а с другой – существенным различием характеристик бафтинга, наблюдаемого при их обтекании (последнее обстоятельство является важным для

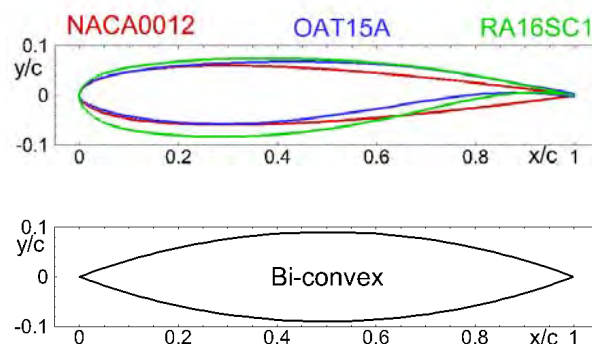


Рис. 241. Рассмотренные аэродинамические профили.

оценки границ применимости разработанной в диссертации методики).

Расчеты проводились в двумерной сжимаемой постановке задачи в предположении о полностью турбулентном характере течения в пограничном слое на обтекаемой поверхности, а для замыкания уравнений Рейнольдса использовалась модель SACC.

Для анализа устойчивости обтекания профилей NACA0012, OAT15A и RA16SC1 использовались однотипные неравномерные сетки типа *C* со сгущением у стенки в направлении нормали к поверхности профиля и в окрестности скачка уплотнения и передней и задней кромок. В качестве примера на Рис. 242 показана сетка, использовавшаяся для профиля RA16SC1.

Для проведения нестационарных расчетов использовались сетки с той же топологией, но с более широкой областью сгущения в окрестности скачка, необходимой для обеспечения высокой точности его разрешения в процессе его движения вдоль поверхности профиля.

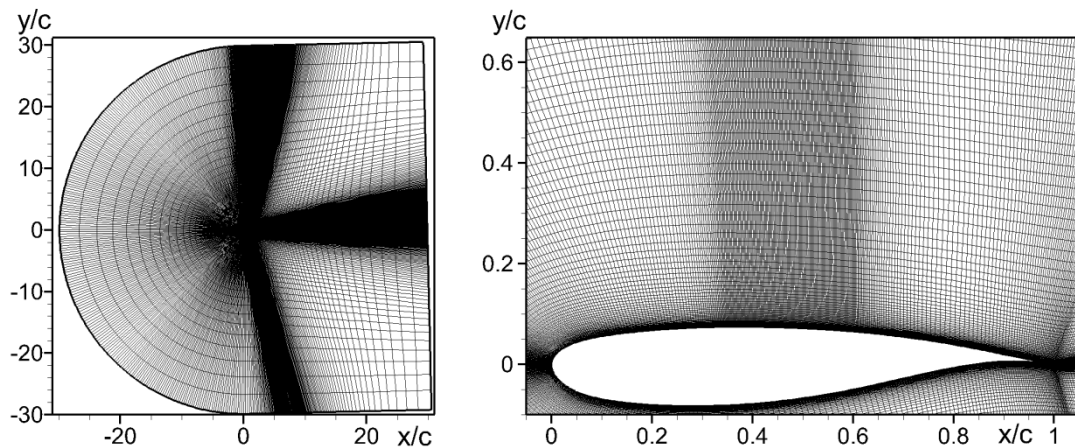


Рис. 242. Конфигурация расчетной области и расчетная сетка для профиля RA16SC1.

С учетом особенностей геометрии двояковыпуклого профиля и нулевого угла атаки, при котором проводились расчеты его обтекания, соответствующие сетки имели другую топологию. В частности, предполагалось, что благодаря симметрии геометрии, анализ устойчивости данного течения может проводиться в половине области с использованием для возмущений антисимметричных граничных условий (5.25) на сетке, показанной на Рис. 243, а нестационарные расчеты выполнялись в полной области на сетке, показанной на Рис. 244.

Режимы, для которых проводились расчеты представлены в Табл. 19. Во всех случаях результаты линейного анализа устойчивости сравнивались с известными экспериментальными данными, а для крыловых профилей NACA0012, OAT15A и двояковыпуклого профиля также с результатами решения нестационарных уравнений Рейнольдса.

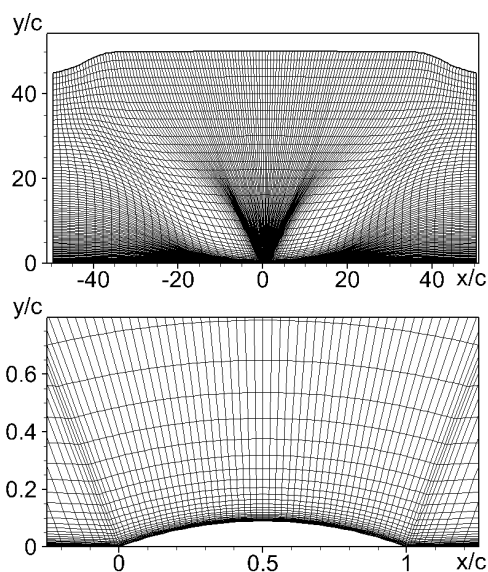


Рис. 243. Расчетная область и сетка, использовавшаяся для анализа линейной устойчивости двойко-выпуклого профиля.

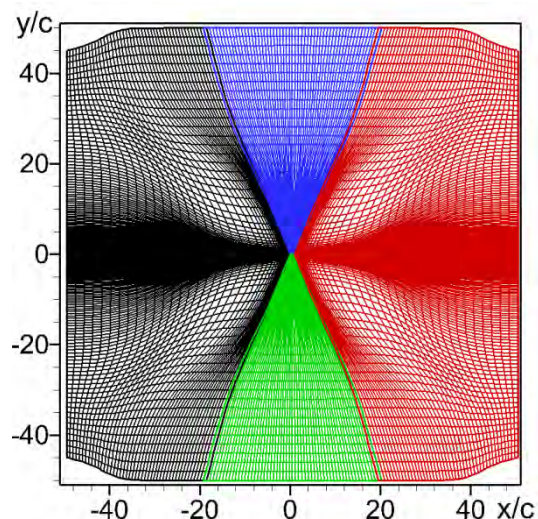


Рис. 244. Расчетная область и четырехблочная сетка, использовавшаяся для нестационарных расчетов обтекания двойко-выпуклого профиля.

Табл. 19. Рассмотренные крыловые профили и характеристики их обтекания.

| Крыловой профиль | Относительная толщина | Число Рейнольдса $Re = U_{\infty}c/\nu$ | Число Маха | Угол атаки |
|------------------|-----------------------|---|------------|-----------------------------|
| NACA0012 | 12% | 10^7 | 0.72-0.8 | $0^{\circ} - 5^{\circ}$ |
| OAT15A | 12.3% | $3 \cdot 10^6$ | 0.72-0.74 | $2.5^{\circ} - 3.5^{\circ}$ |
| RA16SC1 | 15.7% | $4.2 \cdot 10^6$ | 0.73 | $2.7^{\circ} - 5.5^{\circ}$ |
| Bi-convex | 18% | $1.1 \cdot 10^7$ | 0.72-0.75 | 0° |

При проведении URANS расчетов обтекания профиля NACA0012 в качестве начальных условий задавался однородный поток, а сами расчеты профиля NACA0012 были выполнены в широком диапазоне чисел Маха (от 0.72 до 0.86) и угла атаки (от 0° до 5°).

Для профиля Bi-convex было проведено две серии URANS расчетов при числах Маха от 0.7 до 0.76 и угле атаки 0° . В первой из них поток полагался полностью турбулентным, а во второй задавался переход пограничного слоя при $x/c = 0.5$ (анализ устойчивости пограничного слоя, проведенный интегральным методом [424], предсказывает именно такое положение точки перехода). В каждой серии расчеты начинались при числе Маха $M_{\infty} = 0.76$, обеспечивающем нестационарное решение, а начальным приближением для остальных расчетов являлось нестационарное периодическое решение при более высоком числе Маха.

При проведении URANS расчетов использовались две стратегии. В частности, при расчете обтекания профилей OAT15A и RA16SC1 в качестве начальных условий использовались сошедшиеся стационарные решения уравнений Рейнольдса. Наряду с определением границ устойчивости, такой подход позволяет определить показатель роста и частоту возмущений на линейной стадии URANS решения (см. пример на Рис. 246). В противоположность этому, при расчетах обтекания профиля NACA0012 и двояковыпуклого профиля, целью которых было только установление факта стационарности или нестационарности получаемого решения и, таким образом, определение границы устойчивости по числу Маха и углу атаки, в качестве начальных условий задавался однородный поток³³.

Шаг интегрирования по времени во всех URANS расчетах составлял $\Delta t = 10^{-2} \cdot c/U_\infty$. Как показали проверочные расчеты с вдвое измельченным шагом, этот шаг обеспечивает практически независимое от Δt решение.

При проведении линейного анализа устойчивости в качестве базовых решений использовались численные решения стационарных уравнений Рейнольдса, сглаженные в окрестности скачка (пример сглаживания для профиля OAT15A приведен на Рис. 247). Необходимость использования сглаживания вызвана следующими причинами. Численная диссипация используемых в NTS коде схем высокого порядка с ограничителями мала, благодаря чему ширина скачка в базовом решении составляет всего 1 - 2 ячейки сетки. Это приводит к разрывам коэффициентов в уравнении для амплитуд возмущений, что, в свою очередь ведет к дополнительной неустойчивости и, как следствие, к появлению «ложных» неустойчивых собственных чисел. Использование ограничителей при проведении анализа устойчивости невозможно из-за их нелинейности. Как показали исследования, выполненные в настоящей работе, эффективной альтернативой ограничителям является сглаживание базового решения. Оно позволяет устранить ложные неустойчивые собственные числа без сколько-нибудь существенного искажения истинных собственных чисел и искомой границы устойчивости (см. Рис. 248).

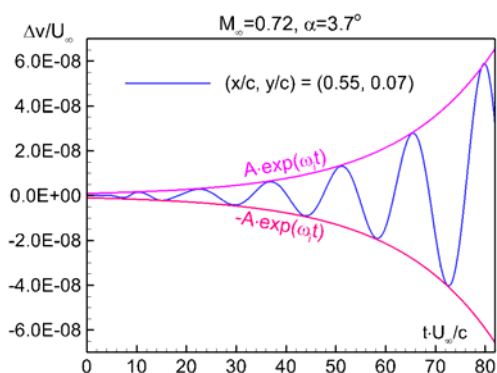


Рис. 245. Типичная зависимость возмущения скорости от времени в нестационарном URANS решении для обтекания профиля OAT15A.

³³ Использование этого подхода требует гораздо меньших времен нестационарных расчетов, чем использование первого подхода, поскольку факт стационарности или нестационарности решения становится очевидным уже после нескольких конвективных времен c/U_∞ .

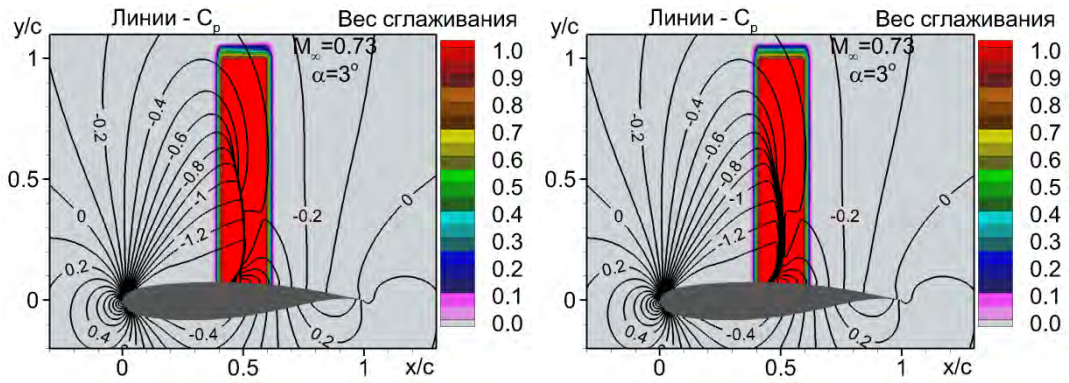


Рис. 247. Область сглаживания базового решения и эффект сглаживания на поле давления: слева стационарное решение уравнений Рейнольдса, справа – сглаженное поле.

Методику определения критического угла атаки на основе анализа устойчивости иллюстрирует Рис. 249. На нем представлены собственные числа, найденные для крылового профиля OAT15A при докритических и сверхкритических углах атаки. Видно, что показатель роста наиболее неустойчивого собственного числа монотонно возрастает с ростом угла атаки и позволяет однозначно определить угол, при котором теряется устойчивость. Полученный для этого числа собственный вектор характеризуется максимумами на скачке и в зоне отрыва за скачком (Рис. 249), что соответствует возмущениям, наблюдаемым в нестационарных решениях уравнений Рейнольдса и в экспериментальных исследованиях бафтинга.

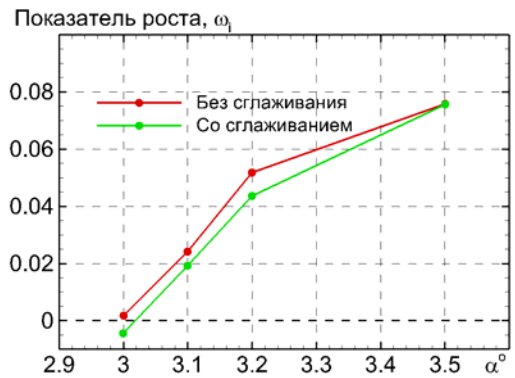


Рис. 248. Влияние сглаживания на зависимость показателя роста от угла атаки.

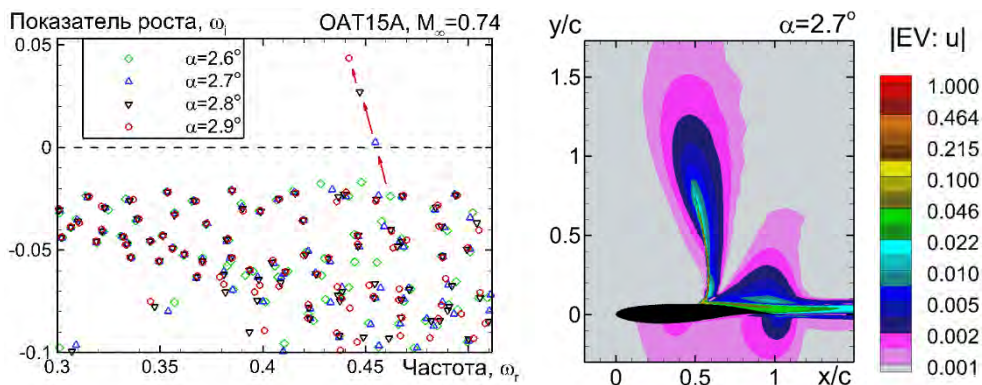


Рис. 249. Карта собственных чисел, полученная из анализа устойчивости крылового профиля OAT15A при различных углах атаки и пример собственного вектора при $\alpha = 2.7^\circ$.

Результаты исследований бафтинга на профиле NASA0012

Результаты экспериментальных исследований бафтинга для профиля NASA0012 [419] свидетельствуют о том, что при относительно низких числах Маха бафтинг связан с колебаниями скачка уплотнения, формирующегося на верхней поверхности крыла (Рис. 250, сверху), однако при дальнейшем увеличении числа Маха структура течения изменяется и в нем формируется второй скачок уплотнения на его нижней поверхности, что приводит к изменению схемы бафтинга с односкачковой на двухскачковую (Рис. 250, снизу). С практической точки зрения наибольший интерес представляет именно односкачковый бафтинг, поскольку он происходит при числах Маха, характерных для самолетов гражданской авиации и представляет для них наибольшую опасность.



M=0.81



M=0.89

Рис. 250. Схема односкачкового и двухскачкового бафтинга из [425].

В настоящей работе была проведена серия нестационарных URANS расчетов обтекания профиля NASA0012 при различных числах Маха и углах атаки, результаты которой, показаны на Рис. 251 (синие ромбики на этом рисунке соответствуют стационарным, а оранжевые – нестационарным режимам течения). Данный рисунок позволяет определить параметры начала бафтинга (границы устойчивости течения) и качественно согласуется с описанными выше экспериментальными наблюдениями. В частности, из него следует наличие двух областей неустойчивости, первая из которых ($0.7 < M_\infty < 0.8$) соответствует односкачковому бафтингу, а вторая ($M_\infty > 0.85$) – двухскачковому.

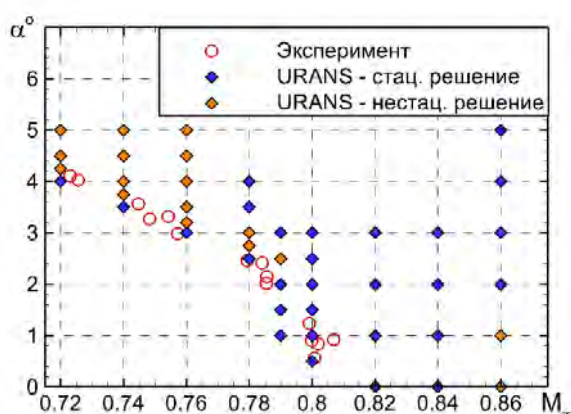


Рис. 251. Карта устойчивых и неустойчивых режимов обтекания профиля NASA0012 в плоскости (M, α) , полученная из решения нестационарных уравнений Рейнольдса

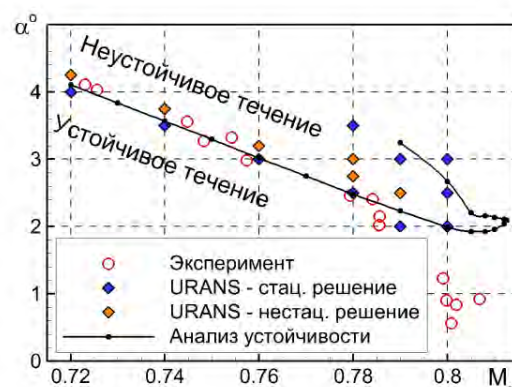


Рис. 252. Сравнение с экспериментальными данными [419] границ устойчивости обтекания профиля NASA0012, определенных с помощью линейного анализа и на основе решения нестационарных уравнений Рейнольдса.

Аналогичные результаты, полученные с помощью анализа устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса, показаны на Рис. 252, где они сравниваются с представленными выше результатами нестационарных расчетов и с экспериментальными данными [419]. Из рисунка видно, что при $M_\infty < 0.8$, то есть для режимов с односкачковым бафтингом, представляющих основной практический интерес, углы атаки, соответствующие началу бафтинга, предсказываемые анализом устойчивости, хорошо согласуются как с соответствующими результатами нестационарных расчетов, так и с экспериментом. Заметное различие с экспериментом при пограничном числе Маха $M_\infty = 0.8$ связано, по всей видимости, с погрешностью, вносимой полуэмпирической моделью турбулентности.

Результаты исследований бафтинга на профилях OAT15A и RA16SC1

Основные результаты анализа устойчивости и нестационарных расчетов обтекания этих профилей представлено на Рис. 253 - Рис. 255. В частности, на Рис. 253 представлено сравнение расчетных зависимостей показателя роста и частоты возмущений от угла атаки при различных числах Маха потока, а на Рис. 254 – зависимости критического (соответствующего началу бафтинга) угла атаки и соответствующей (критической) частоты возмущений от числа Маха для профиля OAT15A. Из этих рисунков видно, что согласно URANS величина показателя роста оказывается несколько ниже этой величины, предсказываемой анализом устойчивости. Однако это приводит лишь к незначительному (примерно на 0.1°) различию соответствующих критических углов атаки. Кроме того, зависимости критического угла атаки и соответствующей частоты возмущений, предсказываемые линейным анализом устойчивости, хорошо согласуются с экспериментом [420] (Рис. 254). То же можно сказать и об аналогичных результатах анализа устойчивости для профиля RA16SC1 (Рис. 255).

Таким образом, совокупность полученных результатов свидетельствует о надежности и достаточно высокой точности предложенной методики применительно к предсказанию начала бафтинга на прямых крыльях.

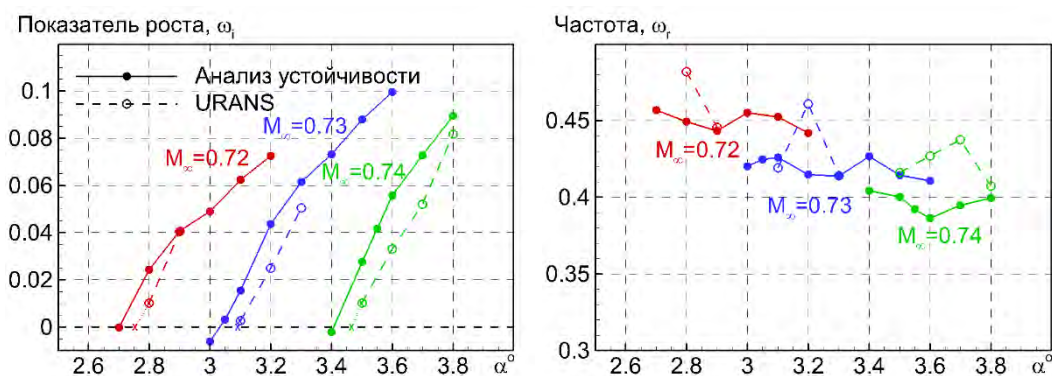


Рис. 253. Сравнение показателя роста и частоты, полученных из анализа устойчивости для профиля OAT15A, с решением нестационарных уравнений Рейнольдса.

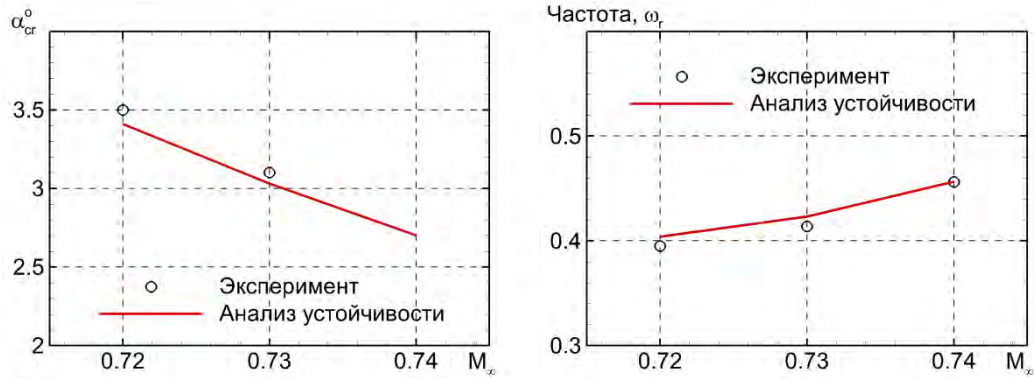


Рис. 254. Сравнение показателя роста и частоты, полученных из анализа устойчивости для профиля OAT15A, с экспериментом [420].

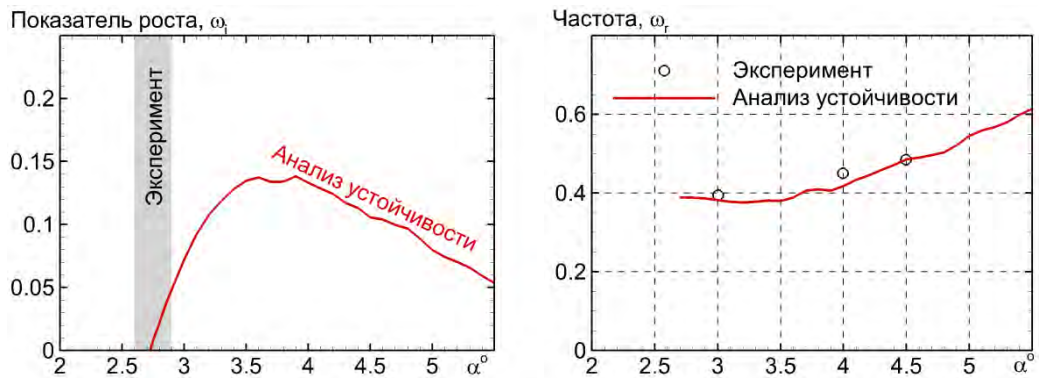


Рис. 255. Сравнение показателя роста и частоты, полученных из анализа устойчивости для профиля RA16SC1 при $M=0.73$, с экспериментом [421].

Результаты исследований бафтинга на двояковыпуклом профиле

Данный и подобные ему симметричные аэродинамические профили не используются для крыльев самолетов, и поэтому исследование устойчивости его обтекания не имеет существенного практического значения. Однако оно представляет значительный методический интерес, поскольку бафтинг на таких профилях является весьма специфическим. В частности, как показано на схеме на Рис. 256, он характеризуется наличием двух скачков уплотнения, которые колеблются в противофазе вдоль нижней и верхней поверхностей профиля.

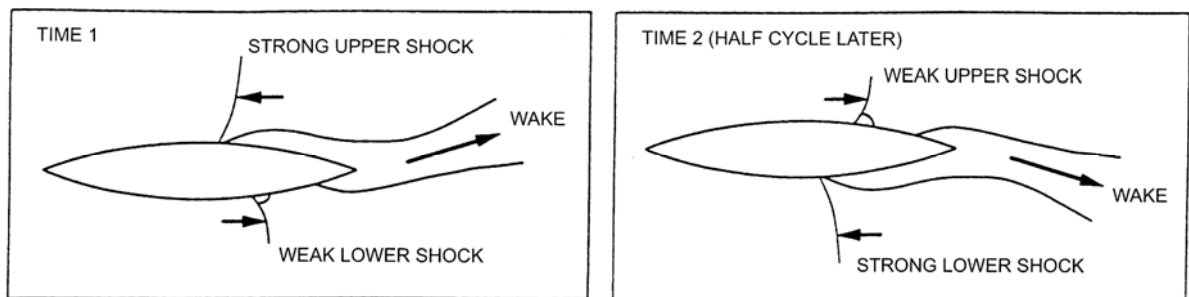


Рис. 256. Схема движения скачков уплотнения на двояковыпуклом профиле (из [426]).

Результаты расчетов, выполненных для данного профиля, приведены на Рис. 257. Из него следует, что, как и в рассмотренных выше случаях “классического” односкачкового бафтинга, граница устойчивости по числу Маха, предсказываемая для данного профиля помощью линейного анализа, хорошо согласуется с экспериментом [423] и оказывается несколько завышенной по сравнению с соответствующей границей, предсказываемой на основе URANS расчетов.

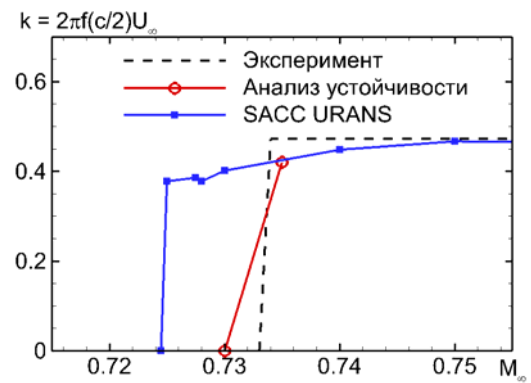


Рис. 257. Сравнение результатов расчетов безразмерной частоты бафтинга на двояковыпуклом профиле от числа Маха, полученных с помощью линейного анализа устойчивости и на основе URANS расчетов, с экспериментом [423].

5.3.3.2. Обтекание стреловидного крыла бесконечного размаха

В отличие от бафтинга на прямом крыле, бафтинг на стреловидных крыльях является существенно трехмерным и его характеристики значительно отличаются от аналогичных характеристик на прямом крыле как в эксперименте (см. [421], [427] - [430]), так и в расчетах с использованием различных методов (см., например, [380], [431] - [433]). В частности, спектр частот бафтинга на стреловидных крыльях является широкополосным, а сами частоты в 4 - 7 раз превышают частоты бафтинга на прямом крыле. Кроме того, конвекция возмущений, вызванная ненулевым значением составляющей скорости, направленной вдоль размаха крыла, приводит к волнообразной форме скачка (Рис. 258). Более подробный анализ особенностей бафтинга на стреловидных крыльях содержится в обзоре [434].

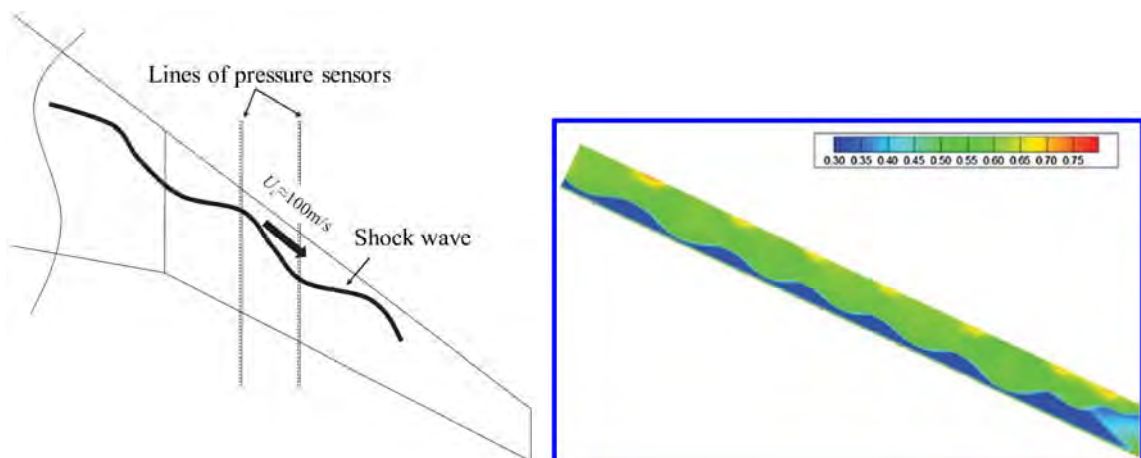


Рис. 258. Волнообразная форма скачка, наблюдаемая на стреловидных крыльях. Эксперимент [428] (слева), URANS расчет [431] (справа).

Для оценки эффективности и точности предложенных в диссертации методов линейного анализа устойчивости применительно к бафтингу на стреловидных крыльях, было рассмотрено

обтекание бесконечного крыла ОАТ15А при угле скоса потока $\Lambda=30^\circ$, числе Маха $M_\infty = 0.843$ и числе Рейнольдса $Re_\infty = 3.46 \cdot 10^6$. Это соответствует значениям чисел Маха и Рейнольдса, построенным по нормальной к оси крыла скорости $U_n = U_\infty \cdot \cos(\Lambda)$, равным $M_n = 0.73$ и $Re_n = 3 \cdot 10^6$, соответственно.

Анализ устойчивости этого течения проводился двумя методами, а именно в рамках его полной трехмерной (раздел 5.1.1) и квазитрехмерной (раздел 5.1.3) версий.

Трехмерный анализ устойчивости был выполнен для различных размеров секции крыла L_z в поперечном направлении от $(0.5c$ до $120c)$ при различных углах атаки в окрестности его критического значения. Расчетная область, расчетная сетка и граничные условия в плоскости ХУ были при этом такими же, как и при анализе обтекания прямого крыла (см. предыдущий раздел). В поперечном направлении, совпадающем с осью z , использовались периодические граничные условия, а количество узлов расчетной сетки составляло от 12 до 22. Поскольку решение трехмерной задачи требует очень больших вычислительных ресурсов (см. раздел 5.2.2), которые нелинейно увеличиваются с ростом размера сетки, ее дальнейшее измельчение по оси z в настоящее время не представляется возможным.

Квазитрехмерный анализ устойчивости выполнялся на той же сетке в плоскости ХУ при различных углах атаки и значениях параметра β , определяющего длину волны возмущений по z : $\lambda_z = 2\pi/\beta$.

Результаты анализа устойчивости сравнивались с решением нестационарных уравнений Рейнольдса, также полученным в рамках настоящей работы, и с результатами квазитрехмерного подхода, представленными в [435].

При проведении нестационарных расчетов расчетная область, сетка и граничные условия в плоскости ХУ были такими же, как при проведении анализа устойчивости. Поперечный размер расчетной области составлял $L_z = 2c$, а на ее границах использовались периодические граничные условия. Шаг расчетной сетки $\Delta z = 0.005c$ был достаточен для разрешения длин волн вплоть до $\lambda_z = 0.1c$. Для эффективного использования вычислительного кластера трехмерная расчетная сетка, размер которой составлял около 40 миллионов узлов, была разбита на 40 блоков. Шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-3} \cdot c/U_\infty$ и обеспечивал выполнение условия $CFL < 1$.

Следует отметить, что использование конечной расчетной области и периодических граничных условий в поперечном направлении «навязывает» периодичность решения как в случае решения уравнений Рейнольдса, так и в случае трехмерного анализа устойчивости. Поэтому проведенное исследование позволяет определить лишь показатель роста или затухания возмущений с периодом L_z или кратным ему, но не позволяет ответить на вопрос о том, какова длина волны

возмущений, развивающихся на бесконечном крыле. То же замечание относится к квазитрехмерному анализу устойчивости, в рамках которого дополнительно предполагается, что возмущения являются не только периодическими, но и гармоническими.

Начальные условия для URANS задавались в форме суперпозиции стационарного квазитрехмерного решения и малых (с амплитудой порядка 10^{-8} - 10^{-7}) возмущений. Было рассмотрено два типа возмущений. Возмущения первого типа являются однородными по оси z и равны вещественной части собственного вектора, полученного из квазитрехмерного анализа устойчивости при $\beta = 0$. Возмущения второго типа являются периодическими по оси z , имеют период $\lambda_z = c$ (что соответствует $\beta = 2\pi$) и равны вещественной части произведения собственного вектора, полученного при $\beta = 2\pi$, и функции $\exp(i\beta z)$. Такой подход позволяет определить не только показатель роста, но и показатель затухания соответствующих возмущений, если относительно них течение оказываются устойчивыми.

Нестационарные расчеты проводились в течение временного интервала достаточного для определения частоты и показателя роста возмущений. Он составлял от 10 до 80 конвективных времен c/U_∞ .

Анализ временных историй газодинамических переменных в различных точках потока, проведенный для всех выполненных нестационарных расчетов, свидетельствует о том, что колебания газодинамических характеристик во всех случаях являются периодическими, а изменение их амплитуды во времени подчиняется экспоненциальному закону. Как видно из примеров зависимостей возмущений поперечной составляющей скорости от времени для различных начальных условий, представленных на Рис. 259 и Рис. 260, они позволяют однозначно определить показатель роста и частоту возмущений.

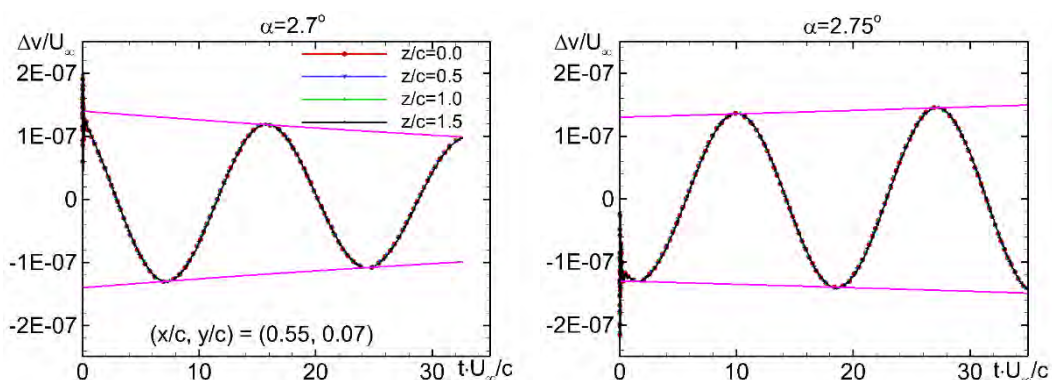


Рис. 259. Примеры зависимостей возмущений поперечной составляющей вектора скорости из нестационарных расчетов с использованием начальных условий с возмущениями первого типа для устойчивого (слева) и неустойчивого (справа) режимов течения.

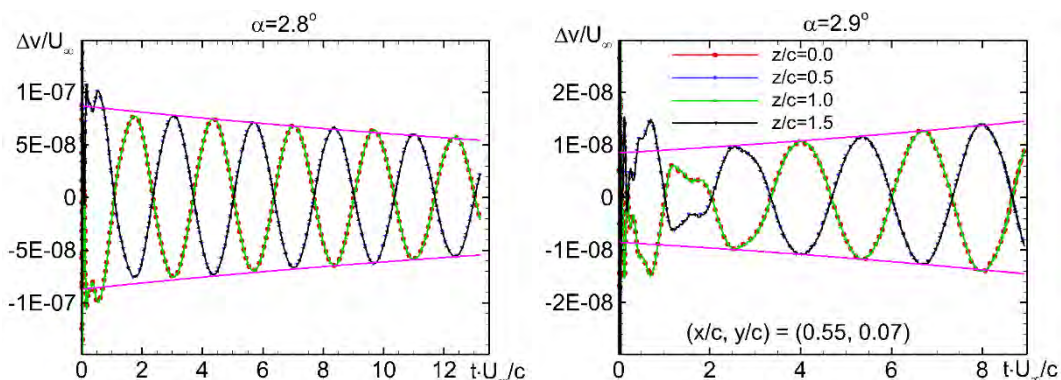


Рис. 260. Примеры зависимостей возмущений поперечной составляющей вектора скорости из нестационарных расчетов с использованием начальных условий с возмущениями второго типа для устойчивого (слева) и неустойчивого (справа) режимов течения.

При проведении квазитрехмерного линейного анализа устойчивости в качестве базового решения использовалось численное решение стационарных уравнений Рейнольдса в квазитрехмерной постановке (в предположении однородности потока вдоль оси z) сглаженное в окрестности скачка (см. раздел 5.3.3.1), а при проведении трехмерного анализа это решение реплицировалось по координате z .

Результаты анализа устойчивости выявили два типа неустойчивости (Рис. 261 и Рис. 262).

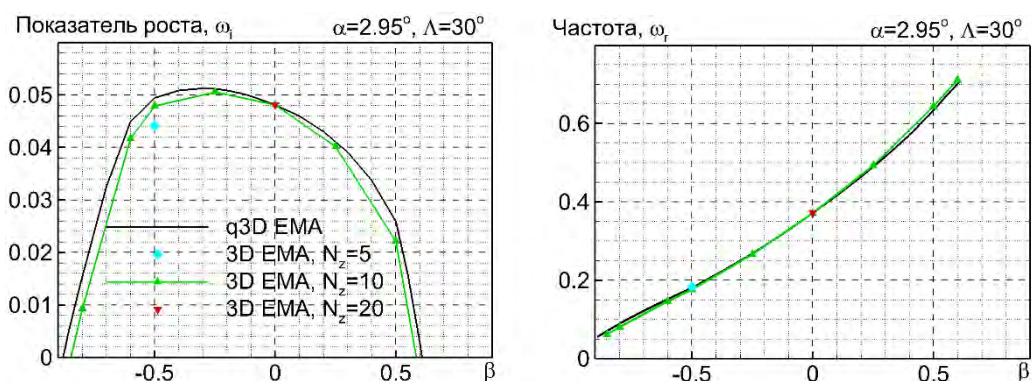


Рис. 261. Зависимость показателя роста и частоты возмущений от волнового числа для неустойчивости первого типа при угле атаки $\alpha = 2.95^\circ$.

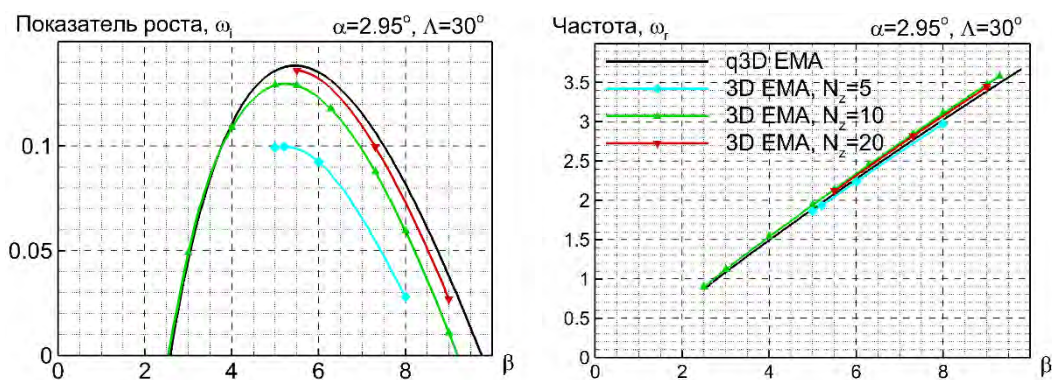


Рис. 262. Зависимость показателя роста и частоты возмущений от волнового числа для неустойчивости второго типа при угле атаки $\alpha = 2.95^\circ$.

Первый тип характеризуется большой длиной волны в направлении оси z ($\lambda_z/c > 6$), которым соответствуют волновые числа $|\beta| < 1$ (Рис. 261). К этому типу неустойчивости принадлежат, в частности, двумерные (однородные по z) возмущения, соответствующие $\beta = 0$, рассматривавшиеся в разделе 5.3.3.1 для прямых крыльев.

Неустойчивость второго типа характеризуется волнообразной формой скачка (см. Рис. 258) с длиной волны в диапазоне от $0.5c$ до $3c$, что соответствует величине β от 2 до 10 (Рис. 262).

Отметим также, что, как следует из Рис. 261 и Рис. 262, результаты трехмерного и квазитрехмерного анализа устойчивости хорошо согласуются друг с другом, причем различие уменьшается с измельчением сетки по поперечной координате. Это свидетельствует о высокой точности квазитрехмерного подхода и его применимости для решения подобных задач. Совпадение результатов трехмерного и квазитрехмерного подходов при $\beta = 0$ является их дополнительной верификацией. Кроме того, как видно из Рис. 263 и Рис. 264, результаты квазитрехмерного анализа устойчивости, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с аналогичными результатами работы [435].

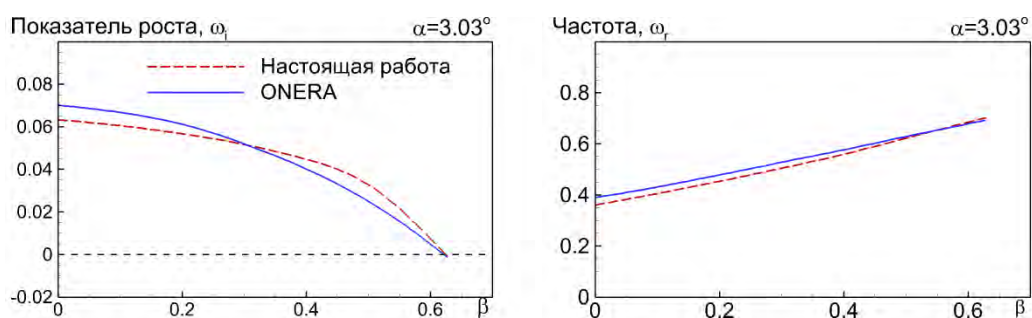


Рис. 263. Сравнение показателя роста и частоты возмущений первого типа, полученных с использованием квазитрехмерного анализа устойчивости, с результатами работы [435].

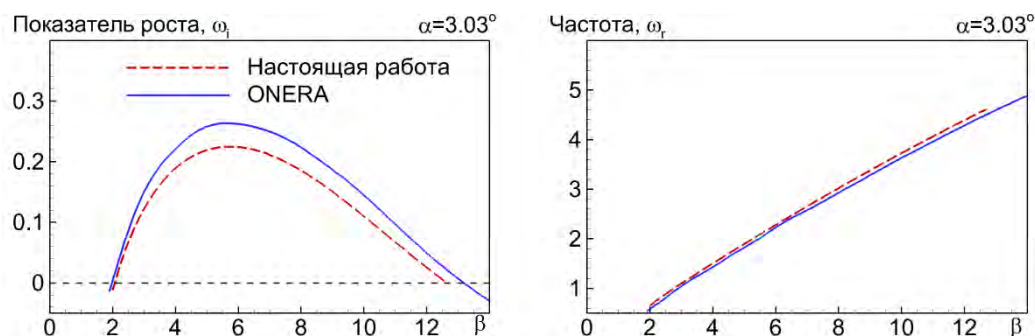


Рис. 264. Сравнение показателя роста и частоты возмущений второго типа, полученных с использованием квазитрехмерного анализа устойчивости, с результатами работы [435].

На Рис. 265 приведены амплитуды собственных векторов, соответствующих продольной компоненте скорости, для неустойчивости первого и второго типов. Из этого рисунка видно, что

при развитии неустойчивости первого типа область максимальных амплитуд возмущений скорости расположена в окрестности скачка (в отрывной зоне и следе за профилем эти возмущения примерно в 20 раз меньше). Для неустойчивости второго типа различие в амплитудах колебаний в области скачка и в следе не столь существенно (около 5 раз).

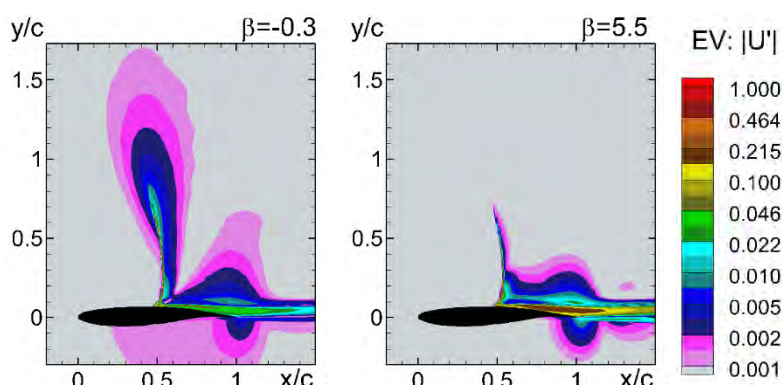


Рис. 265. Примеры собственных векторов, полученных в рамках квазитрехмерного подхода при $\alpha = 3.03^\circ$, для значений β , соответствующих максимумам неустойчивостей первого и второго типа на Рис. 261 и Рис. 262.

Как и в предыдущих случаях, показатель роста, предсказываемый в рамках нестационарных уравнений Рейнольдса для неустойчивости обоих типов, оказывается несколько ниже результатов линейного анализа устойчивости (Рис. 266 и Рис. 267). Однако, это различие несущественно и приводит к завышению критического угла атаки, полученного методом URANS, всего на 0.05° (Табл. 20, Рис. 268 и Рис. 269). Частоты колебаний скачка, представленные на этих рисунках, также хорошо согласуются с результатами URANS.

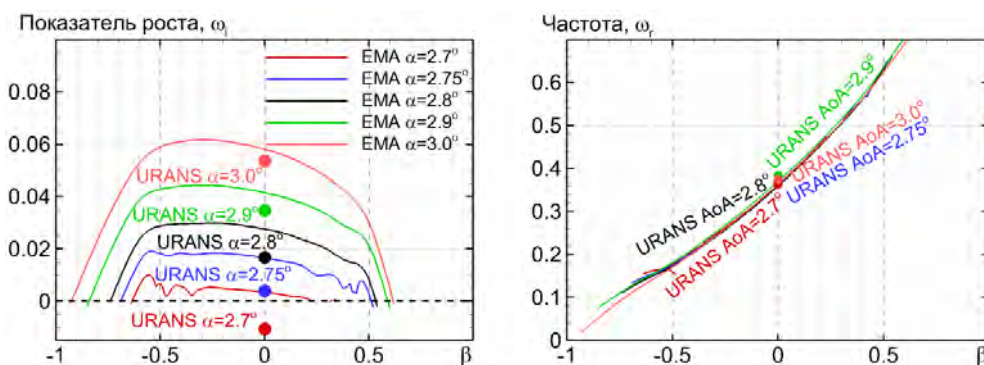


Рис. 266. Сравнение показателя роста и частоты возмущений для неустойчивости первого типа, полученных с использованием квазитрехмерного анализа устойчивости, с результатами URANS.

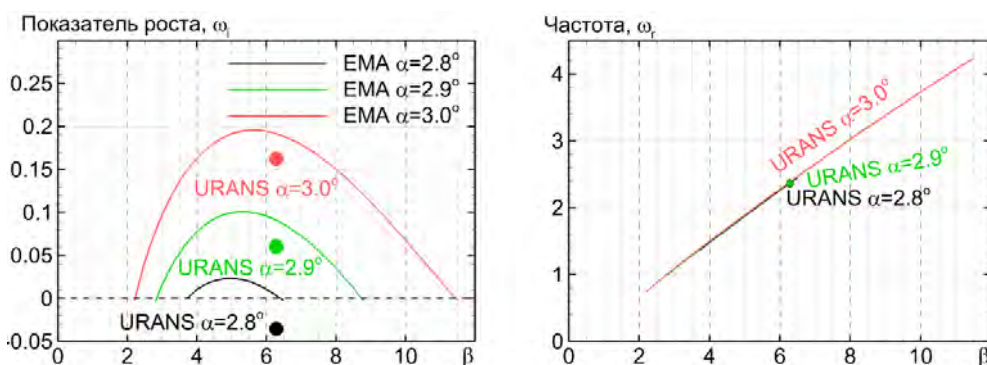


Рис. 267. Сравнение показателя роста и частоты возмущений для неустойчивости второго типа, полученных с использованием квазитрехмерного анализа устойчивости, с результатами URANS.

Табл. 20. Критические углы атаки, полученные для различных типов неустойчивости в рамках различных подходов.

| Метод | Неустойчивость первого типа ($\beta = 0$) | Неустойчивость второго типа ($\beta = 2\pi$) |
|---|---|--|
| Решение нестационарных уравнений Рейнольдса | 2.74 | 2.84 |
| Трехмерный анализ устойчивости | 2.69 | 2.81 |
| Квазитрехмерный анализ устойчивости | 2.69 | 2.80 |

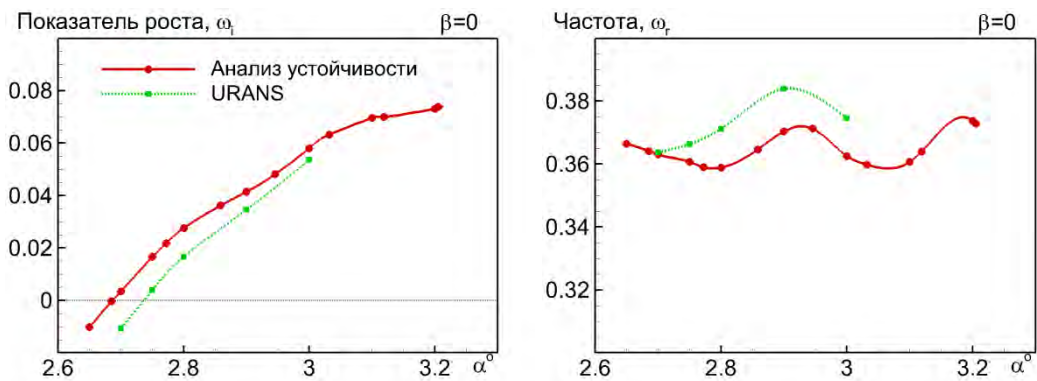


Рис. 268. Сравнение показателя роста и частоты однородных по z возмущений ($\beta = 0$), полученных различными способами.

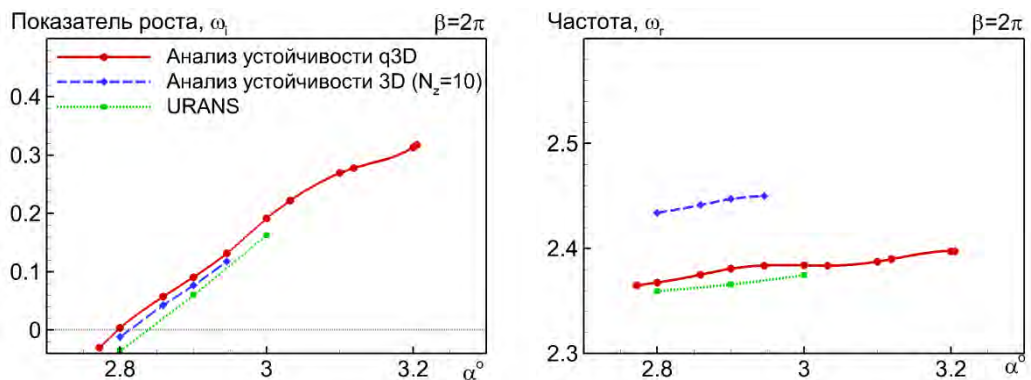


Рис. 269. Сравнение показателя роста и частоты возмущений, полученных различными способами при $\beta = 2\pi$.

Таким образом, представленные результаты убедительно демонстрируют применимость разработанного квазитрехмерного подхода для предсказания бафтинга не только на прямых, но и на стреловидных крыльях бесконечного размаха.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенных исследований состоят в следующем.

1. На основе аналитического обзора существующих методов численного моделирования пристеночных турбулентных течений определены возможные пути их усовершенствования.
2. Разработан ряд оригинальных модификаций двух наиболее успешных полуэмпирических моделей турбулентности для расчета пристеночных турбулентных течений, а именно, модели переноса турбулентной вязкости Спаларта-Аллмараса (SA модель) и двухпараметрической SST модели Ментера (SST модель). В частности, предложены:
 - две нелинейные модели, предназначенные для расчета течений, в которых существенную роль играет анизотропия рейнольдсовых напряжений;
 - две модификации линейной модели SST, обеспечивающие повышение точности расчета обтекания аэродинамических профилей при условиях близких к срыву потока и расчета течений с существенной кривизной линий тока и вращением потока;
 - две модификации модели SA, первая из которых обеспечивает повышение точности расчета осесимметричных течений, а вторая – повышение точности расчета присоединенных пограничных слоев при низких числах Рейнольдса.
3. Проведены верификация предложенных моделей путем сравнения результатов расчетов, полученных с их помощью при использовании двух различных CFD кодов (FLUENT и NTS код), и их широкое тестирование путем сравнения с экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования. Показано, что разработанные модели превосходят по точности как базовые модели SA и SST, так и существующие аналоги.
4. Предложены существенные усовершенствования гибридных RANS-LES подходов, включающие:
 - новые версии глобальных методов DDES и IDDES на основе $k-\omega$ SST модели, превосходящие по точности оригинальные версии;
 - новую DES-подобную гибридную RANS-LES модель SST σ -DDES, обеспечивающую значительное ускорение формирования трехмерных разрешаемых турбулентных структур в оторвавшихся слоях смещения;
 - эффективную технологию реализации одностадийного зонного RANS-LES подхода с использованием объемных источников в уравнениях переноса импульса и кинетической энергии турбулентности для генерации турбулентного контента на интерфейсе между RANS и LES зонами, применимую на произвольных, в том числе неструктурированных, сетках.
5. Разработана новая гибридная схема для аппроксимации невязких составляющих векторов потоков в уравнениях переноса в рамках гибридных RANS-LES подходов, обеспечивающая

- устойчивость алгоритма и высокую точность разрешения турбулентных вихревых структур при расчете как присоединенных, так и отрывных пристеночных течений.
6. Проведено всестороннее тестирование разработанных гибридных моделей и методов на основе сопоставления полученных с их использованием результатов расчетов с известными экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования.
 7. С использованием гибридных RANS-LES подходов получены новые детальные количественные данные об аэродинамических и аэроакустических характеристиках ряда сложных пристеночных течений, некоторые из которых рассмотрены впервые:
 - поперечное обтекание тандема цилиндров;
 - обтекание трехэлементного аэродинамического профиля DLR-F15;
 - обтекание модельной конфигурации крыло – закрылок;
 - транс- и сверхзвуковое обтекание возвращаемого космического аппарата и отделяемого головного блока пилотируемого космического корабля в режиме его вывода на орбиту и при аварийном отделении от ракеты-носителя.
 8. Разработан новый зонный RANS-DNS-IDDES подход, с помощью которого на рекордной для России расчетной сетке 8.3 миллиарда узлов выполнен расчет трансзвукового обтекания выпуклости на цилиндрической поверхности, сопровождающегося формированием скачка уплотнения с последующим отрывом и присоединением пограничного слоя.
 9. Предложен новый подход к анализу глобальной устойчивости турбулентных течений, базирующийся на линейном анализе устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса. Для реализации этого подхода создан комплекс вычислительных алгоритмов и программ для определения условий возникновения и развития глобальной временной и пространственной неустойчивости в двумерных и трехмерных турбулентных потоках.
 10. Проведена тщательная верификация разработанного математического аппарата и его программной реализации на широком круге задач об устойчивости ламинарных и турбулентных течений:
 - развитие неустойчивости Толлмина-Шлихтинга в канале;
 - устойчивость ламинарного обтекания прямоугольной каверны на плоской поверхности;
 - устойчивость ламинарного и турбулентного слоя Экмана;
 - устойчивость ламинарного поперечного обтекания цилиндров постоянного и переменного диаметра;
 - возникновение продольных вихрей в турбулентном течении Куэтта;
 - появление вихревых ячеек при турбулентном обтекании крыльев бесконечного размаха.
 11. С использованием разработанного программного обеспечения получены новые результаты, касающиеся условий возникновения трансзвукового бафтинга на прямых и стреловидных крыльях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides // Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France, Vol. 6, 1822.
2. Poisson. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides // Journal de l'École Polytechnique, Vol. 13, 1831.
3. deSaint-Venant. Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, présenté le 14 avril 1834 // Comptes rendus, Vol. 17, No. 22, 1843.
4. Stokes. On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 8, 1845.
5. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // Int. J. Heat Fluid Flow, Vol. 21, 2000. pp. 252–263.
6. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 186, 1895. pp. 123-161.
7. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment // Monthly Weather Review, Vol. 91, 1963. pp. 99-164.
8. Prandtl L. Uber die ausgebildete Turbulenz // Z. angew Math. Mech., Vol. 5, No. 1, 1925. pp. 136–139.
9. Spalart P.R. Philosophies and fallacies in turbulence modeling // Progress in Aerospace Sciences, Vol. 74, No. 1, 2015. pp. 1-15.
10. Jenkins L.N., Neuhart D.H., McGinley C.B., Choudhari M.M., Khorrami M.R. Measurements of Unsteady Wake Interference Between Tandem Cylinders // AIAA Paper 2006–3202, 2006.
11. "ATAAC - Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Application Challenges" [Электронный ресурс] URL: <http://cfm.mace.manchester.ac.uk/twiki/bin/view/ATAAC>
12. Spalart P.R. Trends in turbulence treatments // AIAA Paper 2000–2306, 2000.
13. Leschziner M.A., Drikakis D. Turbulence modelling and turbulent-flow computation in aeronautics // Aeronautical Journal, Vol. 106, No. 1061, 2002. pp. 349–384.
14. Rapp C.R. Experimentelle Studie der turbulenten Stromung uber periodische Hugel, Technische Universitat Munchen., 2008.
15. Rodi W. DNS and LES of some engineering flows // Fluid Dynamics Research, Vol. 38, No. 2–3, 2006. pp. 145–173.
16. Koschichow D., Fröhlich J., Ciorciari R., Niehuis R. Analysis of the influence of periodic passing wakes on the secondary flow near the endwall of a linear LPT cascade using DNS and U-RANS. 11th European Conference on Turbomachinery Fluid Dy // 11th European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics, ETC 2015. 2015.
17. Spalart P.R., Belyaev K.V., Garbaruk A.V., Shur M.L., Strelets M.K., Travin A.K. Large-Eddy and Direct Numerical Simulations of the Bachalo-Johnson Flow with Shock-Induced Separation // Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 99, No. 3-4, 2017. pp. 865-885.
18. Chapman D.R. Computational aerodynamics development and outlook // AIAA Journal, Vol. 17, 1979. pp. 1293-1313.

19. Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations // *Annual Rev. Fluid Mech.*, Vol. 34, 2002. pp. 349-374.
20. Schumann U. Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli // *Journal of Computational Physics*, Vol. 18, No. 4, 1975. pp. 376-404.
21. Larsson J., Kawai S., Bodart J., Bermejo-Moreno I. Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions // *Mechanical Engineering Reviews*, 2015. P. 418.
22. Bose S.T., Park G.I. Wall-Modeled Large-Eddy Simulation for Complex Turbulent Flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 50, No. 1, 2018. pp. 535–561.
23. Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M., Allmaras S.R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach" // *Proceedings of first AFOSR international conference on DND/LES*. 1997.
24. Sagaut P., Deck S., Terracol M. *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence*". Imperial College Press, 2006.
25. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. *Современные подходы к моделированию турбулентности : учеб. пособие*. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2016.
26. von Terzi D., Frohlich J. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 44, No. 5, 2008. pp. 349–377.
27. Menter F.R., Schütze J., Gritskevich M.S. Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling // *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Vol. 117, 2012. pp. 15–28.
28. Peng S.H., Haase W. "Advances in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Corfu, Greece, 17–18 June 2007". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 97. 2008.
29. Peng S.H., Doerffer P., Haase W. "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Gdansk, Poland, June 2009". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 111. 2010.
30. Fu S., Peng S.H., Haase W., D. S. (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Beijing, China, September 2011". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 117. 2012.
31. Girimaji S., Peng S.H., Haase W., D. S. "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, College Station, A&M University, Texas, USA, 19-21 March 2014". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 130. 2015.
32. Deck S. Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 26, No. 6, 2011. pp. 523–550.
33. Spalart P.R., Strelets M.K. *Attached and Detached Eddy Simulation* // 6th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods. Strasbourg, France. 2016.
34. Moin P. *Wall Modeling in Large-Eddy Simulation* // 32nd Symposium on Naval Hydrodynamics. Hamburg, Germany. 2018.
35. Girimaji S., Sreenivasan R., Jeong E. PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS, LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary Results // FEDSM2003-45336, *Proceedings of ASME FEDSM'03 2003 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conferences*. Honolulu, Hawaii USA. 2003.

36. Clauser F.H. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. // *Journal Aeron. Sci.*, Vol. 21, 1954. pp. 91-108.
37. Klebanoff P.S. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient, 1956.
38. van Driest E.R. On Turbulent Flow Near a Wall. // *Journal Aero. Sci.*, Vol. 23, No. 11, 1956.
39. Rotta J.C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz // *Z. Phys.*, Vol. 129, 1951. P. 547.
40. Coles D.E., Hirst E.A. Computation of Turbulent Boundary Layers // AFOSR-IFP Stanford Conference. Vol. II. Stanford Univ., Palo Alto, CA. 1968.
41. "Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center", (page curator and responsible official C. Rumsey). [Электронный ресурс] URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov>
42. "ERCOFTAC QNET-CFD Knowledge Base Wiki". URL: http://www.ercoftac.org/products_and_services/wiki/
43. Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M.A., Müller U.R. "ECARP - European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models", Notes on Numerical Fluid Mechanics, v. 58. 1997.
44. Haase W., Aupoix, B., Bunge, U., Schwamborn, D. "FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling", Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 2006, v. 94 (<http://cfd.mace.manchester.ac.uk/flomania/>). 2006.
45. Гарбарук А.В. Современные полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений: тестирование и сравнительный анализ, Санкт-Петербург, 1999.
46. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Оценка возможностей явных алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений применительно к расчету пристенных пограничных слоев // *Теплофизика Высоких Температур*, Т. 37, № 6, 1999. С. 920–927.
47. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Расчет трехмерного турбулентного течения в "S" образном канале прямоугольного сечения // *Теплофизика Высоких Температур*, Т. 41, № 1, 2003. С. 57–64.
48. Гарбарук А.В., Спаларт Ф.Р., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Численное моделирование управления отрывом с помощью механических и струйных вихрегенераторов // *Математическое Моделирование*, Т. 18, № 3, 2006. С. 55–68.
49. Frank T., Jain S., Matyushenko A.A., Garbaruk A.V. The OECD/NEA MATIS-H benchmark – CFD analysis of water flow through a 5X5 rod bundle with spacer grids using ANSYS FLUENT AND ANSYS CFX // CFD4NRS-4, Conference on Experimental Validation and Application of CFD and CMFD Codes in Nuclear Reactor Technology, OECD/NEA and IAEA Workshop, 10-12 September 2012. Daejeon, South Korea. 2012.
50. Матюшенко А.А., Гарбарук А.В. Расчет течения вдоль пучка цилиндров при наличии локальных завихрителей потока // *Тепловые Процессы в Технике*, № 11, 2013. С. 482.
51. Harlow F.H., Nakayama H. Transport of turbulence energy decay rate, University California, 1968.
52. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 68, No. 3, 1975. pp. 537-566.
53. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4, 1993. С. 69-81.
54. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper 1992-0439*, 1992.

55. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Оценка возможностей различных подходов к моделированию турбулентности применительно к расчету сверхзвукового следа за донным срезом цилиндра // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и в ствольных системах (ICOC-2008): Шестая Всерос.конф. (pp. 25–33). С.-Петербург: Ижевск: ИПМ УрО РАН, 2008. 2008.
56. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA-Paper 1993-2906, 1993.
57. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // In: Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 (ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers). 2003. pp. 625 - 632.
58. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, No. 2, 1974. pp. 269–289.
59. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, 1988. pp. 1299–1310.
60. Wilcox D.C. A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows // AIAA Paper 1993-2905, 1993.
61. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 28, 1967. pp. 593-616.
62. Durbin P.A. Separated Flow Computations with the $k-\epsilon-v_2$ Model // AIAA Journal, Vol. 33, No. 4, 1995. pp. 659-664.
63. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 227, 1991. pp. 245-272.
64. Johansson, A., Wallin, S. A new explicit algebraic Reynolds stress model // 6th European Turbulence Conference. Lausanne, Switzerland. 1996.
65. Cecora R.D., Eisfeld B., Probst A., Crippa S., Radespiel R. Differential Reynolds Stress Modeling for Aeronautics // AIAA Paper 2012-0465, 2012.
66. Garbaruk A.V., Shur M.L., Strelets M.K., Spalart P.R. Numerical study of wind-tunnel walls effects on transonic airfoil flow // AIAA Journal, Vol. 41, No. 6, 2003. pp. 1046-1054.
67. Garbaruk A.V., Magidov D., Shur M.L., Strelets M.K., Travin A.K. Contribution by SPTU: Support of Partners' Efforts Directed to Implementation of DES Technology // In: FLOMANIA—A European Initiative on Flow Physics Modelling, D.S.W.Haase, B.Aupoix, U.Bunge (Ed.). Springer, 2006. pp. 101–108.
68. Pope S.B. A More General Effective-Viscosity Hypothesis // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 72, No. 2, 1975. pp. 331-340.
69. Gatski T.B., Speziale C.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 254, 1993. pp. 59–78.
70. Abid R., Rumsey C., Gatski T.B. Prediction of nonequilibrium turbulent flows with explicit algebraic stress models. // AIAA Journal, Vol. 33, No. 11, 1995. pp. 2026-2031.
71. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // Z. Angew. Math. Mech., Vol. 56, 1976. pp. 219-221.
72. Nisizima S. A numerical study of turbulent square-duct flow using an anisotropic $k-\epsilon$ model // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 24, No. 495, 1990. pp. 1377-1381.
73. Shih, T., Zhu, J., Lumley, J. L. A Realizable Reynolds Stress Algebraic Equation Model, NASA TM 16596, 1993.

74. Girimaji S.S. A Galilean invariant explicit algebraic Reynolds stress model for turbulent curved flows. // *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 4, 1997. pp. 1067–1077.
75. Chen W., Lien, F., Leschziner, M. A. Non-linear eddy-viscosity modelling of transitional boundary layers pertinent to turbomachine aerodynamics. // *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, 1998. pp. 297–306.
76. Wallin S., Johansson A.V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 403, 2000. pp. 89-132.
77. Chien K.Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 1, 1982. pp. 33-38.
78. Menter F.R. Influence of Freestream Values on k-w Turbulence Model Predictions. // *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 6, 1992. pp. 1657–1659.
79. Hellsten A., Laine S. Explicit Algebraic Reynolds Stress Modelling in Decelerating and Separating Flows // *AIAA Paper 2000-2313*, 2000.
80. Hellsten A. New Advanced k-w Turbulence Model for High-Lift Aerodynamics. // *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 9, 2005. pp. 1857–1869.
81. Menter F.R., Garbaruk A.V., Egorov Y. Explicit Algebraic Reynolds Stress Models for Anisotropic Wall-Bounded Flows // *Progress in Flight Physics*, Vol. 3, 2012. pp. 89-104.
82. Matyushenko A.A., Garbaruk A.V. Non-linear correction for the k- ω SST turbulence model // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 929, 2017. P. 012102.
83. Wendt F. Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern // *Ing. Arch.*, No. 4, 1933. pp. 577-595.
84. Wattendorf F. A Study of the Curvature on Fully Developed Turbulent Flow // *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 148(A), 1935. pp. 565-598.
85. Eskinazi S., Yeh H. An Investigation on Fully Developed Turbulent Flows in a Curved Channel // *Journal Aero. Sci.*, Vol. 23, 1956. pp. 23-34.
86. Hunt I.A., Joubert P.N. Effects of small streamline curvature on turbulent duct flow // *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 91, No. 4, 1982. pp. 633-659.
87. Dong S.K., Chung, M.K. Curvature Corrections to Reynolds Stress Model for Computation of Turbulent Recirculating Flows. // *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 12, 1992. pp. 2968–2970.
88. Bradshaw P. The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 36, No. 1, 1969. pp. 177–191.
89. Rodi W. Influence of Buoyancy and Rotation on Equations for the Turbulent Length Scale // *Proceedings of the 2nd Symposium on Turbulent Shear Flows*. London, Imperial College. 1979. pp. 10.37- 10.42.
90. Rodi W., Scheuerer, G. Calculation of curved shear layers with two-equation turbulence models. // *Physics of Fluids*, Vol. 26, No. 6, 1983. pp. 1422–1436.
91. Launder B.E., Priddin C.H., Sharma B.I. The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces // *ASME, Journal of Fluids Engineering*, Vol. 99, 1977. pp. 231-239.
92. Leschziner M.A., Rodi, W. Computation of strongly swirling axisymmetric free jets. // *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 12, 1984. pp. 1742–1747.
93. Spalart P.R., Shur M.L. On the sensitization of simple turbulence models to rotation and curvature // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 1, No. 5, 1997. pp. 297-302.

94. Knight D.D., Saffman P.G. Turbulence Model Predictions for Flows with Significant Mean Streamline Curvature // AIAA Paper 78-258, 1978.
95. Wallin S., Johansson A.V. Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models // International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 23, No. 5, 2002. pp. 721–730.
96. Shur M., Strelets, M., Travin, A., Spalart, P.R. Two Numerical Studies of Trailing Vortices // AIAA Paper 98-0595, 1998.
97. Shur M.L., Strelets, M.Kh., Travin, A.K., Spalart, P.R. Turbulence Modeling in Rotating and Curved Channels: Assessing the Spalart-Shur Correction // AIAA Journal, Vol. 38, No. 5, 2000. pp. 784–792.
98. Burr R.C., Menter F.R., Grotjans H., Frühauf H.H. Development of a Curvature Correction Method for the k-w Turbulence Model // Proc. Computational Fluid Dynamics'98. Athens, Greece. 1998. Vol. 2. pp. 1105-1110.
99. Zhang Q., Yang, Y. A new simpler rotation/curvature correction method for Spalart-Allmaras turbulence model // Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 26, No. 2, 2013. pp. 326–333.
100. Smirnov P.E., Menter, F.R. Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart–Shur Correction Term // Journal of Turbomachinery, Vol. 131, 2009. P. 041010.
101. Стабников А.С., Гарбарук А.В. Модификация поправки на кривизну линий тока и вращение в модели sst на основе les вращающегося сдвигового слоя // Тепловые Процессы в Технике, № 4, 2016. С. 146-150.
102. Yang S.L., Chang, Y.L., Arici, O. Incompressible Navier-Stokes Computation of the NREL Airfoils Using a Symmetric Total Variational Diminishing Scheme // Journal of Solar Energy Engineering, Vol. 116, 1994. pp. 174-182.
103. Yang S.L., Chang, Y.L., Arici, O. Post-Stall Navier-Stokes Computations of the NREL Airfoil Using a k-w Turbulence Model // ASME SED - Vol. 16, Wind Energy, 1995. pp. 127-136.
104. Chang Y.L., Yang, S.L., Arici, O. Flow Field Computation of the NREL S809 Airfoil Using Various Turbulence Models // ASME, Energy Week-96, Book VIII, Vol. I-Wind Energy. 1996. pp. 172-178.
105. Bertagnolio F., Sørensen, N.N., Johansen J. Profile Catalogue for Airfoil Sections Based on 3D Computations, 2006.
106. Villalpando F., Reggio, M., Ilinca, A. Assessment of Turbulence Models for Flow Simulation around a Wind Turbine Airfoil // Modelling and Simulation in Engineering. 2011. P. 714146.
107. Занин Б.Ю., Козлов В.В., Проскрянов В.Г. Структура турбулентного отрыва на прямом крыле при различных условиях обтекания // Учен. Записки ЦАГИ., Т. 30, № 1-2, 1999. С. 77–83.
108. Schewe G. Reynolds-number effects in flow around more-or-less bluff bodies // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 89, No. 14–15, 2001. pp. 1267–1289.
109. Занин Б.Ю., Козлов В.В. Вихревые структуры в дозвуковых отрывных течениях: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2011.
110. Plante F., Dandois, J., Laurendeau, É. Similitude between 3D cellular patterns in transonic buffet and subsonic stall // AIAA Paper 2019-0300, 2019.
111. Manni L., Nishino, T., Delafin, P.L. Numerical study of airfoil stall cells using a very wide computational domain // Comput. Fluids., Vol. 140, 2016. pp. 260–269.
112. Rodriguez D., Theofilis V. On the birth of stall cells on airfoils // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 25, 2011. pp. 105–117.

113. Busquet D., Marquet O., Richez F., Juniper M., Sipp D. Global stability analysis of turbulent flows around an airfoil near stall // EUROGEN 2017. 2017.
114. Plante F., Dandois J., Beneddine S., Sipp D., Laurendeau E. Numerical simulations and global stability analyses of transonic buffet and subsonic stall // 54th 3AF International Conference on Applied Aerodynamics. 2019.
115. Матюшенко А.А., Котов Е.В., Гарбарук А.В. Анализ причин снижения точности при расчете обтекания крыловых профилей в рамках двумерных уравнений Рейнольдса // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки, Т. 10, № 1, 2017. С. 20-30.
116. Матюшенко А.А., Гарбарук А.В. Численное исследование влияния трехмерных «грибообразных» структур на характеристики обтекания крыловых профилей // Тепловые Процессы в Технике, № 1, 2016. С. 31-36.
117. Матюшенко А.А., Гарбарук А.В., Менгер Ф.Р., Смирнов П.Е. Усовершенствование k- ω SST модели турбулентности применительно к расчету обтекания прямых крыльев конечного размаха // Тепловые процессы в технике, Т. 11, № 7, 2019. С. 290–298.
118. Birch S.F. One-equation models revisited // AIAA Paper 93-2903, 1993.
119. Wilcox D.C. Formulation of the k-w Turbulence Model Revisited // AIAA Journal, Vol. 46, No. 11, 2008. pp. 2823–2838.
120. Pope S.B. An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly // AIAA Journal, Vol. 16, No. 3, 1978. pp. 279–281.
121. Cebeci T., Smith A.M.O. Analysis of Turbulent Boundary Layers. New York: Academic, 1974.
122. Spalart P.R., Garbaruk A.V. A Correction to the Spalart-Allmaras Turbulence Model, Providing More Accurate Skin Friction in Boundary Layers at Low Reynolds Numbers // AIAA Journal, Vol. 58, No. 5, 2020. pp. 1903-1905.
123. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. Detached Eddy Simulation of an Airfoil at High Angle of Attack // Engineering turbulence modelling and experiments 4. 1999.
124. Kok J.C., Dol H.S., Oskam B., van der Ven H. Extra-large eddy simulation of massively separated flows // AIAA Paper 2004-0264, 2004.
125. Travin A., Shur M.L., Strelets M.K., Spalart P.R. Physical and Numerical Upgrades in the Detached-Eddy of Complex Turbulent Flows // In: Advances in LES of Complex Flows. 2002. pp. 239-254.
126. Greschner B., Thiele F., Jacob M.C., Casalino D. Prediction of sound generated by a rod-airfoil configuration using EASM DES and the generalised Lighthill/FW-H analogy // Computers and Fluids, Vol. 37, No. 4, 2008. pp. 402-413.
127. Jee S., Shariff K. Detached-eddy simulation based on the v2-f model // International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 46, 2014. pp. 84–101.
128. Strelets M.K. Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows // AIAA Paper 2001–0879, 2001.
129. Travin A.K., Shur M.L., Strelets M.K., Spalart P. Detached-Eddy Simulations Past a Circular Cylinder // Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 63, No. 1-4, 2000. pp. 293-313.
130. Allen R., Mendonca F., Kirkham D. RANS and DES turbulence model predictions of noise on the M219 cavity at M=0.85 // International Journal of Aeroacoustics, Vol. 4, No. 1, 2005. pp. 135–152.
131. Shieh C.M., Morris P.J. Comparison of Two- and Three-Dimensional Turbulent Cavity Flow // AIAA paper 2001-0511, 2001.

132. Mendonça F., Allen R., de Charentenay J., Kirkham D. CFD Prediction of Narrowband and Broadband cavity acoustics at $M=0.85$ // AIAA Paper 2003-3303, 2003.
133. Kapadia S., Roy S., Wurtzler K. Detached Eddy Simulation over a Reference Ahmed Car // AIAA Paper 2003-0857, 2003.
134. Maddox S., Squires K.D., Wurtzler K.E., Forsythe J.R. Detached-Eddy Simulation of the Ground Transportation System. Vol 19. // In: The Aerodynamics of Heavy Vehicles: Trucks, Buses, and Trains. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. pp. 89-104.
135. Spalart P.R., Squires K.D. The Status of Detached-Eddy Simulation for Bluff Bodies. Vol 19. // In: The Aerodynamics of Heavy Vehicles: Trucks, Buses, and Trains. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. pp. 29-45.
136. Roy C., Brown J., DeChant L., Barone M. Unsteady Turbulent Flow Simulations of the Base of a Generic Tractor/Trailer // AIAA Paper 2004-2255, 2004.
137. Sreenivas K., Pankajakshan R., Nichols D.S., Mitchell B.C.J., Taylor L.K., Whitfield D.L. Aerodynamic Simulation of Heavy Trucks with Rotating Wheels // AIAA Paper 2006-1394, 2006.
138. Hedges L.S., Travin A.K., Spalart P.R. Detached-Eddy Simulations Over a Simplified Landing Gear // Journal of Fluids Eng., Vol. 124, No. 2, 2002. P. 413.
139. Forsythe J.R., Hoffmann K.A., Cummings R.M., Squires K.D. Detached-Eddy Simulation With Compressibility Corrections Applied to a Supersonic Axisymmetric Base Flow // ASME. J. Fluids Eng., Vol. 124, No. 4, 2002. pp. 911-923.
140. Deck S., Thorigny P. Unsteadiness of an axisymmetric separating-reattaching flow: Numerical investigation // Physics of Fluids, Vol. 19, No. 6, 2007.
141. Cummings R.M., Morton S.A., Forsythe J.R. Detached-eddy simulation of slat and flap aerodynamics for a high-lift wing // AIAA Paper 2004-1233, 2004.
142. Spalart P., Hedges L., Shur M., Travin A. Simulation of Active Flow Control on a Stalled Airfoil // Flow, Turbulence and Combust., Vol. 71, No. 1, 2003. pp. 361-373.
143. Krishnan V., Squires K.D., Forsythe J.R. Prediction of Separated Flow Characteristics over a Hump using RANS and DES // AIAA Paper 2004-2224, 2004.
144. Fu S., Xiao Z., Chen H., Zhang Y., Huang J. Simulation of wing-body junction flows with hybrid RANS/LES methods // International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28, No. 6, 2007. pp. 1379-1390.
145. Spalart P.R. Detached-eddy simulation // Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 41, No. 1, 2009. pp. 181-202.
146. Fröhlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // Prog. Aerosp. Sci., Vol. 44, No. 5, 2008. pp. 349-377.
147. Nikitin N.V., Nicoud F., Wasistho B., Squires K.D., Spalart P.R. An approach to wall modeling in large-eddy simulations // Physics of Fluids, Vol. 12, No. 7, 2000. pp. 1629-1632.
148. Menter F.R., Kuntz M. Adaptation of eddy-viscosity turbulence models to unsteady separated flow behind vehicles // In: Aerodynamics of Heavy Vehicles: Trucks, Buses and Trains. Springer, 2004. pp. 339-352.
149. Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M.K., Travin A.K. A New Version of Detached-eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 20, No. 3, 2006. pp. 181-195.
150. Mockett C.A. Comprehensive Study of Detached-Eddy Simulation. Technical University Berlin, 2009.

151. Leger T., Poggie J. Detached-Eddy Simulation of a Reattaching Shear Layer in Compressible Turbulent Flow // AIAA Paper 2014-3329, 2014.
152. Grossi F., Braza M., Hoarau Y. Prediction of Transonic Buffet by Delayed Detached-Eddy Simulation // AIAA Journal, Vol. 52, No. 10, 2014. pp. 2300–2312.
153. Michel U., Eschricht D., Greschner B., Knacke T., Mockett C., Panek L., Thiele F., Yan J. Simulation of the Sound Radiation of Turbulent Flows With DES // West-East High Speed Flow F. Conf. Moscow. 2007.
154. Shurtz T., Blaisdell G.A., Lyrintzis A.S. Suitability of Detached Eddy Simulation in Overflow for Predicting Environments near Supersonic Jets // AIAA Paper 2012-0888, 2012.
155. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K. Noise prediction for increasing complex jets. Part II: Applications // Int. J. Aeroacoustics, Vol. 4, No. 3, 2005. pp. 247–266.
156. Kok J.C., van der Ven H. Destabilizing free shear layers in X-LES using a stochastic subgrid-scale model // Notes Numer. Fluid Mech. Multidiscip. Des., Vol. 111, 2010. pp. 179–189.
157. Vreman A.W. The filtering analog of the variational multiscale method in large-eddy simulation // Phys. Fluids, Vol. 15, No. 8, 2003.
158. Stolz S., Schlatter P., Kleiser L. High-pass filtered eddy-viscosity models for large-eddy simulations of transitional and turbulent flow // Phys. Fluids, Vol. 17, No. 6, 2005. pp. 1–14.
159. Kok J.C., van der Ven H. Capturing free shear layers in hybrid RANS – LES simulations of separated flow, 2012.
160. Kok J.C. Application of a stochastic backscatter model for grey-area mitigation in detached eddy simulations // Sixth HRLM Symposium. 2016.
161. Kok J.C. A stochastic backscatter model for grey-area mitigation in detached eddy simulations // Flow, Turbul. Combust., Vol. 99, No. 1, 2017. pp. 119–150.
162. Mockett C., Fuchs M., Garbaruk A., Shur M., Spalart P., Strelets M., Thiele F., Travin A. Two Non-zonal Approaches to Accelerate RANS to LES Transition of Free Shear Layers in DES. Vol 130. // In: Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer, 2015. pp. 187-201.
163. Nicoud F., Ducros F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor // Flow, Turbul. Combust., Vol. 62, No. 3, 1999. pp. 183–200.
164. Nicoud F., Toda H.B., Cabrit O., Bose S., Lee J. Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations // Phys. Fluids., Vol. 23, No. 8, 2011. pp. 1-12.
165. Vreman A.W. An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow: Algebraic theory and applications // Phys. Fluids., Vol. 16, No. 10, 2004. pp. 3670–3681.
166. Trias F.X., Gorobets A., Oliva A. Building proper invariants for eddy-viscosity models // Phys. Fluids., Vol. 27, No. 6, 2015. pp. 1–17.
167. Spalart P. Young-Person's Guide guide to Detached-Eddy Simulation Grids, NASA/CR-2001-211032, 2001.
168. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. An Enhanced Version of DES with Rapid Transition from RANS to LES in Separated Flows // Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 95, No. 4, 2015. pp. 709–737.
169. Arakeri J.H., Krothapalli A., Siddavaram V., Alkislal M.B., Lourenco L.M. On the use of microjets to suppress turbulence in a Mach 0.9 axisymmetric jet // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 490, 2003. pp. 75–98.

170. Simonich J.C., Narayanan S., Barber T.J., Nishimura M. Aeroacoustic characterization, noise reduction, and dimensional scaling effects of high subsonic jets // *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 11, 2001. pp. 2062–2069.
171. Bridges J., Wernet M.P. Establishing Consensus Turbulence Statistics for Hot Subsonic Jets // *AIAA Paper 2010–3751*, 2010.
172. Lau A.C., Moris P.J., Fisher M.J. Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter // *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 93, No. 1, 1979. pp. 1-27.
173. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 29, No. 6, 2008. pp. 1638–1649.
174. Gritskevich M.S., Garbaruk A.V., Schütze J., Menter F.R. Development of DDES and IDDES Formulations for the $k-\omega$ Shear Stress Transport Model // *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 88, No. 3, 2012. pp. 431–449.
175. Quemere P., Sagaut P. Zonal multi-domain RANS/LES simulations of turbulent flows // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. 40, 2002. pp. 903–925.
176. Schluter J., Wu X., Kim S., Shankaran S., Alonso J.J., Pitsch H. A Framework for Coupling Reynolds-Averaged With Large-Eddy Simulations for Gas Turbine Applications // *Transactions of the ASME*, Vol. 127, 2005. pp. 806–815.
177. von Terzi D.A., Frohlich J. Coupling conditions for LES with downstream RANS for prediction of incompressible turbulent flows // *5th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. 2007. pp. 765–770.
178. von Terzi D.A., Frohlich J. Segregated coupling of large-eddy simulations with downstream Reynolds-Averaged Navier–Stokes calculations // *Computers and Fluids*, Vol. 39, No. 8, 2010. pp. 1314–1331.
179. Cokljat D., Caridi D., Link G., Lechner R., Menter F.R. Embedded LES Methodology for General-Purpose CFD Solvers // *6th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. 2009. pp. 1191–1196.
180. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic and Aeroacoustic Problems // *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 93, No. 1, 2014. pp. 63–92.
181. Lund T.S., Wu X., Squires K.D. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations // *Journal of Computational Physics*, Vol. 140, No. 2, 1998. pp. 233–258.
182. Kaltenbach H., Fatica M., Mittal R., Lund T., Moin P. Study of flow in a planar asymmetric diffuser using large-eddy simulation // *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 390, 1999. pp. 151–185.
183. von Terzi D., Schneider H., Bauer H. The Impact of Secondary Mean Vortices on Turbulent Separation in 3D Diffusers // *High Performance Computing in Science and Engineering'10*. 2010. pp. 339–352.
184. Spalart P.R., Strelets M., Travin A. Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer // *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 27, 2006. pp. 902–910.
185. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., A.K. T. A rapid and accurate switch from RANS to LES in boundary layers using an overlap region // *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 86, 2011. pp. 179–206.
186. Araya G., Castillo L., Meneveau C., Cansen K. A dynamic multi-scale approach for turbulent inflow boundary conditions in spatially developing flows // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 670, 2011. pp. 581–605.

187. Keating A., Piomelli U., Balaras E., Kaltenbach H.J. A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation // *Phys. Fluids*, Vol. 16, 2004. pp. 4696–4712.
188. Keating A., de Prisco G., Piomelli U. Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations // *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 27, 2006. pp. 777–788.
189. Tabor G., Baba-Ahmadi M. Inlet conditions for large eddy simulation: a review // *Computers and Fluids*, Vol. 39, 2010. pp. 553–567.
190. Xie Z.T., Castro I.P. Efficient generation of inflow conditions for large eddy simulation of street-scale flows // *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 81, 2008. pp. 449–470.
191. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // *Phys. Fluids*, Vol. 13, 1970. pp. 22–31.
192. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *Journal of Fluids Eng.*, Vol. 123, 2001. pp. 359–371.
193. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation // *AIAA Journal*, Vol. 42, 2004. pp. 485–492.
194. Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений // *Математическое моделирование*, Т. 23, № 7, 2011. С. 3-19.
195. Bechara W., Bailly C., Lafon P., Candel S. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA Journal*, Vol. 32, 1994. pp. 455–463.
196. Billson M., Eriksson L.E., Davidson L. Jet noise prediction using stochastic turbulence modeling // *AIAA Paper 2003–3282*, 2003.
197. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // *Trans. AIEE*, Vol. 47, 1928. P. 617–644.
198. Гарбарук А.В., Грицкевич М.С. Применение двустадийного RANS/LES подхода для расчета аэродинамики течений с отрывной зоной умеренного размера // *Тепловые Процессы в Технике*, № 11, 2011. С. 484.
199. Garnier E., Adams N., Sagaut P. *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Springer, 2009.
200. Грицкевич М.С., Гарбарук А.В. Встроенный LES с использованием объемного источника турбулентных пульсаций // *Научно-технические ведомости Политехнического университета, Физико-математические науки*, Т. 141, № 1, 2012. С. 27-35.
201. Durbin P.A. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions” // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3, No. 3, 1991. pp. 1-13.
202. Stabnikov A.S., Garbaruk A.V. Testing of modified curvature-rotation correction for k- ω SST model // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 769, 2016. P. 012087.
203. Moisy F., Morize C., Rabaud M., Sommeria J. Decay laws, anisotropy and cyclone–anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence // *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 666, 2010. pp. 5–35.
204. Brethouwer G. The effect of rotation on rapidly sheared homogeneous turbulence and passive scalar transport. Linear theory and direct numerical simulation // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 542, 2005. pp. 305–342.
205. Brethouwer G., Matsuo Y. DNS of Rotating Homogeneous Shear Flow and Scalar Mixing // *Proceedings of direct and large-eddy simulation VI (DLES)*, 2005, edited by. Springer, Dordrecht. 2006. pp. 225-232.

206. Jacobitz F.G., Liechtenstein L., Schneider K., Farge M. On the structure and dynamics of sheared and rotating turbulence: Direct numerical simulation and wavelet-based coherent vortex extraction // *Physics Of Fluids*, Vol. 20, 2008. P. 045103.
207. Bardina J., Ferziger J.H., Reynolds W.C. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows, Thermosciences Division Department of Mechanical Engineering Stanford University Stanford, California, 1983.
208. Comte-Bellot G., Corrsin S. Simple Eulerian time of full and narrow-band velocity signals in grid-generated “isotropic” turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 48, 1971. pp. 273-337.
209. Shur M., Strelets M., Travin A. High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows // Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology. Huntington Beach, USA. 2004.
210. Speziale C.G. Turbulence modeling in non-inertial frames of reference // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Jan 1988. pp. 3-19.
211. Matyushenko A.A., Garbaruk A.V. Validation of the SST-HL turbulence model for separated flows and flows around airfoils // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1135, 2018. P. 012097.
212. Matyushenko A.A., Garbaruk A.V. Adjustment of the k- ω SST turbulence model for prediction of airfoil characteristics near stall // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 769, 2016. P. 012082.
213. Gleyzes C., Capbern P. Experimental study of two AIRBUS/ONERA airfoils in near stall conditions. Part I: Boundary layers // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 7, No. 6, 2003. pp. 439-449.
214. Wieghardt K., Tillman W. On the Turbulent Friction Layer for Rising Pressure, 1951.
215. Schoenherr K.E. Resistance of flat surfaces moving through a fluid // *Transactions - The Society of Naval Architects and Marine Engineers*, Vol. 40, 1932. pp. 279-313.
216. Menter F.R., Smirnov P.E., Liu T., Avancha R.A. One-Equation Local Correlation-Based Transition Model // *Flow Turbulence and Combustion*, Vol. 95, No. 4, 2015. pp. 583-619.
217. Mehdizadeh O.Z., Temmerman L., Tartinville B., Hirsch C. Applications of EARSM turbulence models to internal flows // *Proceedings of ASME Turbo Expo 2012 GT2012-68886*. 2012.
218. Troshin A.I., Vlasenko V.V., Wolkov A.V. Implementation of EARSM turbulence model within discontinuous Galerkin method // *29 Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*. 2014.
219. Rogers S.E., Kwak D. An Upwind Differencing Scheme for the Time Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations // *AIAA Paper 88-2583*, 1988.
220. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *Journal of Comput. Phys.*, Vol. 2, No. 1, 1967. pp. 12-26.
221. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // *Journal of Comput. Phys.*, Vol. 43, No. 2, 1981. pp. 357-372.
222. van Leer B. Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the Euler equations // *Large Scale Computations in Fluid Mechanics, Lectures in Appl. Math.* 22, II, Eds. B. Enquist, S. Osher, R. Somerville. AMS, Providence, RI. 1985. pp. 327-336.
223. Андерсон Д., Таннехилл Д., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 х т. Т. 2: [Пер. с англ.]. Москва: Мир, 1990.
224. Murthy J.Y. Survey of Numerical Methods // In: *Handbook of Numerical Heat Transfer*. 2nd Edition / ed. W. J. Minkowycz, Sparrow E.M., Murthy. J.Y. 2006. pp. 1-984.

225. Mathur S.R., Murthy J.Y. A pressure-based method for unstructured meshes // Numerical Heat Transfer, Vol. 32, 1997. pp. 195–215.
226. Kim S.E., Mathur S., Murthy J., Choudhury D. A Reynolds-averaged Navier-Stokes solver using unstructured mesh-based finite-volume scheme // AIAA Paper 1998-231, 1998.
227. Kim S.E. Unstructured Mesh Based Reynolds Stress Transport Modeling of Complex Turbulent Shear Flows // AIAA Paper 2001-0728, 2001.
228. Kim S.E., Makarov B., Caraeni D. A Multidimensional Linear Reconstruction Scheme for Arbitrary Unstructured Grids // AIAA Paper 2003-3990, 2003.
229. Kim S.E. Large eddy simulation using an unstructured mesh based finite-volume solver // AIAA Paper 2004-2548, 2004.
230. Rhie C.M., Chow W.L. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation // AIAA Journal, Vol. 11, No. 1525–1532, 1983. P. 21.
231. Esch T., Menter F.R. Heat transfer prediction based on two-equation turbulence models with advanced wall treatment // Turbulence Heat and Mass Transfer 4. 2003.
232. Menter F., Carregal Ferreira J., Esch T., Konno B. The SST Turbulence Model with Improved Wall Treatment for Heat Transfer Predictions in Gas Turbines // Proceedings of the International Gas Turbine Congress. Tokyo. 2003.
233. Гарбарук А.В., Матюшенко А.А., Стрелец М.Х. Оценка преимуществ нелинейных моделей турбулентности при расчете течений в каналах прямоугольного сечения // Тепловые Процессы в Технике, № 5, 2016. С. 195–200.
234. Грицкевич М.С., Матюшенко А.А., Гарбарук А.В. Влияние стенок кожуха на характеристики турбулентного теплообмена в сборках тепловыделяющих элементов // Тепловые процессы в технике, № 9, 2017. С. 387–391.
235. Raiesi H., Piomelli U., Pollard A. Evaluation of Turbulence Models Using Direct Numerical and Large-Eddy Simulation Data // Journal of Fluids Engineering, Vol. 133, No. 2, 2011.
236. Cherry E.M., Elkins C.J., Eaton J.K. Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows // International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 29, No. 3, 2008. pp. 803–811.
237. Cherry E.M., Elkins C.J., Eaton J.K. Pressure measurements in a three-dimensional separated diffuser // International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 30, No. 1, 2009. pp. 1–2.
238. Davis D., Gessner F. Further Experiments on Supersonic Turbulent Flow Development in a Square Duct // AIAA Journal, Vol. 27, No. 8, 1989. P. 1023.
239. Chang S.K., Kim S., Song C.H. Turbulent mixing in a rod bundle with vaned spacer grids: OECD/NEA–KAERI CFD benchmark exercise test // Nuclear Engineering and Design, Vol. 279, 2014. pp. 19–36.
240. Brodersen O., Rakowitz M., Amant S., Larrieu P., Destarac D., Sutcliffe M. Airbus, ONERA, and DLR results from the 2nd AIAA drag prediction workshop // AIAA Paper 2004-0391, 2004.
241. Langtry R.B., Kuntz M., Menter F.R. Drag prediction of engine-airframe interference effects with CFX-5 // Journal of Aircraft, Vol. 42, No. 6, 2004. P. 1523.
242. Peng S., Eliasson P. A comparison of turbulence models in prediction of flow around the DLR-F6 aircraft configuration // AIAA Paper 2004-4718, 2004.
243. Kristoffersen R., Andersson H.I. Direct Simulation of Low-Reynolds-Number Turbulent Flow in a Rotating Channel // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 256, 1993. pp. 163–197.

244. Monson D.J., Seegmiller H.L., Mc Connaughey P.K., Chen Y.S. Comparison of Experiment with Calculations Using Curvature-Corrected Zero and Two Equation Turbulence Models for a Two-Dimensional U-Duct // AIAA Paper 90-148, 1990.
245. Spalart P.R., Garbaruk A.V. The Predictions of Common Turbulence Models in a Mature Vortex // Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 102, No. 3, 2019. pp. 667–677.
246. Chow J.S., Zilliac G.G., Bradshaw P. Mean and Turbulence measurements in the Near Field of a Wingtip Vortex // AIAA Journal, Vol. 35, No. 10, 1997. pp. 1561-1567.
247. Spalart P., Shur M., Strelets M., Travin A. Direct Simulation and RANS Modelling of a Vortex Generator Flow // Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 95, No. 2, 2015. pp. 335-350.
248. Somers D.M. Design and Experimental Results for the S805 Airfoil, National Renewable Energy Laboratory, Colorado, US, 1997.
249. Somers D.M. Design and Experimental Results for the S825 Airfoil, National Renewable Energy Laboratory, Colorado, US, 2005.
250. Somers D.M. Design and Experimental Results for the S809 Airfoil, National Renewable Energy Laboratory, Colorado, US, 1997.
251. Somers D.M. Design and Experimental Results for the S814 Airfoil, National Renewable Energy Laboratory, Colorado, US, 1997.
252. Timmer W.A., van Rooij R.P.J.O.M. Summary of the Delft University Wind Turbine Dedicated Airfoils // AIAA Paper 2003-0352, 2003.
253. Albertson M.L., Dai Y.B., Iensen R.A., Rouse H. Diffusion of submerged jets // Proc. of ASME, Vol. 74, 1948.
254. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD (3rd edition). DCW Industries, Inc., 2006.
255. McKeon B.J., Swanson C.J., Zagarola M.V., Donnelly R.J., Smits A.J. Friction factors for smooth pipe flow // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 511, 2004. pp. 41–44.
256. Spalart P.R. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$ // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 187, 1988. pp. 61-98.
257. Coleman G.N., Spalart P.R., Rumsey C.L. Numerical study of turbulent separation bubbles with varying pressure gradient and Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 847, 2018. pp. 28-70.
258. Probst A., Schwamborn D., Garbaruk A., Guseva E., Shur M., Strelets M., Travin A. Evaluation of grey area mitigation tools within zonal and non-zonal RANS-LES approaches in flows with pressure induced separation // International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 68, 2017. pp. 237-247.
259. Gritskevich M.S., Garbaruk, A.V., Menter F.R. Fine-tuning of DDES and IDDES formulations to the $k-\omega$ shear stress transport model // Progress in Flight Physics, Vol. 5, 2013. pp. 23-42.
260. Гусева Е.К., Гарбарук А.В., Стрелец М.Х. Разработка и тестирование σ -DDES подхода на основе $k-\omega$ SST модели // Тепловые процессы в технике, Т. 9, № 10, 2017. С. 434-439.
261. Никифорова К.В., Гарбарук А.В., Ментер Ф., Смирнов П.Е. Объемный генератор синтетической турбулентности в программном пакете ANSYS Fluent // Тепловые процессы в технике, № 9, 2017. С. 426-430.
262. Piomelli U., Moin P., Ferziger J.H. Model Consistency in Large-Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow // Physics of Fluids, Vol. 31, 1988. pp. 1884–1894.
263. Vandoormaal J.P., Raithby G.D. Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows // Numer. Heat Transfer, Vol. 7, 1984. pp. 147–163.

264. Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corp., 1980.
265. Armsfield S., Street R. The Fractional-Step Method for the Navier-Stokes Equations on Staggered Grids: Accuracy of Three Variations // *Journal of Computational Physics*, Vol. 153, 1999. pp. 660–665.
266. Dukowicz J.K., Dvinsky A.S. Approximate Factorization as a High-Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations // *Journal of Computational Physics*, Vol. 102, 1992. pp. 336–347.
267. Jasak H., Weller H.G., Gosman A.D. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes // *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 31, No. 2, 1999. pp. 431–449.
268. Guseva E.K., Garbaruk A.V., Strelets M.K. An automatic hybrid numerical scheme for global RANS-LES approaches // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 929, No. 1, 2017. P. 012099.
269. Гусева Е.К., Стрелец М.Х., Гарбарук А.В. Тестирование метода DDES с подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения // *Тепловые Процессы в Технике*, Т. 7, № 12, 2015. С. 552–557.
270. Guseva E.K., Garbaruk A.V., Strelets M.K. Application of DDES and IDDES with shear layer adapted subgrid length-scale to separated flows // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 769, 2016. P. 012081.
271. Guseva E.K., Garbaruk A.V., Strelets M.K. Assessment of Delayed DES and Improved Delayed DES Combined with a Shear-Layer-Adapted Subgrid Length-Scale in Separated Flows // *Flow Turbulence and Combustion*, Vol. 98, No. 2, 2017. pp. 481–502.
272. Guseva E.K., Gritskevich M.S., Garbaruk A.V. Assessment of two approaches to accelerate RANS to LES transition in shear layers in the framework of ANSYS-FLUENT // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1038, 2018. P. 012134.
273. Mockett C.R., Fuchs M., Thiele F.H., Wallin S., Peng S.H., Deck S., J.C. K., H. V.D.V., A. G., M. S., M. S., Travin A.K. Non-zonal approaches for grey area mitigation. Vol 134. // In: *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. 2018. pp. 17-50.
274. Reichardt H. Vollständige darstellung der turbulenten geschwindigkeitsverteilung in glatten leitungen // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 31, 1951. pp. 208–219.
275. Boyer V., Laurence D.R.P. A Shape Function Approach for High- and Low-Reynolds near-wall Turbulence Models // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, 2002. pp. 241–251.
276. Vogel J.C., Eaton J.K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step // *Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, 1985. pp. 922–929.
277. Greenblatt D., Paschal K., Yao C.S., Harris J. A Separation Control CFD Validation Test Case Part 2. Zero Efflux Oscillatory Blowing // *AIAA Paper 2005-0485*, 2005.
278. Uzun A., Malik M.R. Wall-Resolved Large-Eddy Simulation of Flow Separation Over NASA Wall-Mounted Hump // *AIAA paper 2017-0538*, 2017.
279. Lyons D.C., Peltier L.J., Zajackowski F.J., Paterson E.G. Assessment of DES Models for Separated Flow From a Hump in a Turbulent Boundary Layer // *5th Joint ASME/JSME Fluids Engineering Conference*. 2007.
280. Garbaruk A., Guseva E., Shur M., Strelets M., Travin A. 2D wall-mounted hump. Vol 134. // In: *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. 2018. pp. 173-187.
281. Herrin J.L., Dutton J.C. Supersonic base flow experiments in the near wake of a cylindrical afterbody // *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 1, 1994. pp. 77–83.

282. Garbaruk A.V., Shur M.L., Strelets M.K., Travin A.K. Supersonic base flow experiments in the near wake of a cylindrical afterbody. Vol 103. // In: "DESider - A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer, 2009. pp. 197-206.
283. Simon F., Deck S., Guillen P., Cedex C. Reynolds-averaged Navier-Stokes/large-eddy simulations of supersonic base flow // AIAA Journal, Vol. 44, No. 11, 2006. P. 2578.
284. Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.P., Sergent E. Assessment of the vortex method for Large Eddy Simulation inlet conditions // Prog. Comput. Fluid Dyn., Vol. 6, 2006. pp. 58–67.
285. Menter F.R., Egorov Y. The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description // Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1, 2010. pp. 113–138.
286. Schewe G. On the structure and resolution of wall-pressure fluctuations associated with turbulent boundary-layer flow // Journal of Fluid Mech., Vol. 134, 1983. pp. 311–328.
287. Coleman G.N., Garbaruk A.V., Spalart P.R. Direct Numerical Simulation and Theories of Wall Turbulence with a Range of Pressure Gradients // 10th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements (ETMM10). 2014.
288. Nikiforova K.V., Guseva E.K., Garbaruk A.V. Application of WMLES to wall-bounded flows with pressure gradient // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1135, 2018. P. 012098.
289. Garbaruk A., Leicher S., Mockett C., Spalart P., Shur M.L., Strelets M.K., Thiele F. Evaluation of time sample and span size effects in DES of nominally 2D airfoils beyond stall. Vol 111. // In: "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer, 2010. pp. 87-99.
290. Гарбарук А.В., Грицкевич М.С. Применение двухстадийного RANS/LES подхода для расчета аэродинамики течений с отрывной зоной умеренного размера // Тепловые Процессы в Технике, Т. 3, № 11, 2011. С. 484-489.
291. Gritskevich M.S., Garbaruk A.V., Frank T., Menter F.R. Investigation of the thermal mixing in a T-junction flow with different SRS approaches // CFD4NRS-4, Conference on Experimental Validation and Application of CFD and CMFD Codes in Nuclear Reactor Technology, OECD/NEA and IAEA Workshop. Daejeon, South Korea. 2012.
292. Грицкевич М.С., Гарбарук А.В. Сравнение различных подходов к моделированию турбулентности для расчета тепломассообмена в Т-образном соединении двух труб // Тепловые Процессы в Технике, № 10, 2013. С. 434–439.
293. Gritskevich M.S., Garbaruk A.V., Frank T., Menter F.R. Investigation of the thermal mixing in a T-junction flow with different SRS approaches // Nuclear Engineering and Design, Vol. 279, 2014. pp. 83–90.
294. Gritskevich M.S., Garbaruk A.V. Influence of upstream pipe bends on the turbulent heat and mass transfer in T-junctions // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 891, 2017. P. 012046.
295. Matyushenko A.A., Garbaruk A.V. Scale resolving simulations of the water flow through a rod bundle with split-type spacer grid // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 572, 2014. P. 012058.
296. Jenkins L.N., Khorrami M.R., Choudhari M.M., McGinley C.B. Characterization of Unsteady Flow Structures Around Tandem Cylinders for Component Interaction Studies in Airframe Noise // AIAA Paper 2005-2812, 2005.
297. Neuhart D., Jenkins L., Choudhari M., Khorrami M. Measurements of the Flowfield Interaction Between Tandem Cylinders // AIAA Paper 2009-3275, 2009.

298. Lockard D.P., Khorrami M.R., Choudhari M.M., Hutcheson F.V., Brooks T.F., Stead D.J. Tandem Cylinder Noise Predictions // AIAA Paper 2007-3450, 2007.
299. Weinmann M., Sandberg R.D., Doolan C.J. Flow and noise predictions for a tandem cylinder configuration using novel hybrid RANS/LES approaches // AIAA Paper 2010-3787, 2010.
300. Guillaume A.B., Freed D., Wessels M., Noelting S., Perot F. Flow and noise predictions for the tandem cylinder aeroacoustic benchmark // *Physics of Fluids*, Vol. 24, No. 3, 2012. pp. 1-25.
301. Lockard D.P. Summary of the tandem cylinder solutions from the Benchmark problems for Airframe Noise Computations-I Workshop // AIAA Paper 2011-353, 2011.
302. Гарбарук А.В., Спаларт Ф.Р., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Расчет аэродинамики и шума при обтекании тандема цилиндров // *Математическое Моделирование*, Т. 26, № 6, 2014. С. 119–136.
303. Hirsch C. Numerical computation of internal & external flows. (Wiley series in numerical methods in engineering). A Waley-Interscience publication, 1988.
304. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K. Noise prediction for increasingly complex jets. Part I: Methods and tests // *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 4, No. 3-4, 2005. pp. 213-246.
305. Ffowcs Williams J.E., Hawkings D.L. Sound Generated by Turbulence and Surfaces in Unsteady Motion // *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. A264, No. 1151, 1969. pp. 321-342.
306. Spalart P.R., Shur M.L. Variants of the Ffowcs Williams – Hawkings equation and their coupling with simulations of hot jets // *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 8, No. 5, 2009. pp. 477-492.
307. Kato C., Iida A., Tanako Y., Fujita H., Ikegawa M. Numerical prediction of aerodynamic noise radiated from low Mach number turbulent wake // AIAA Paper 93-0145, 1993.
308. Seo J.H., Chang K.W., Moon Y.J. Aerodynamic noise prediction for long-span-bodies // AIAA Paper 2006-2573, 2006.
309. Bendat J.S., Piersol A.G. Engineering applications of correlation and spectral analysis. NY-Chichester-Brisbane-Toronto: Willey&Sons, 1980.
310. Spalart P.R., Shur M.L., Strelets M.K., Travin A.K. Sensitivity of Landing-Gear Noise Predictions by Large-Eddy Simulation to Numerics and Resolution // AIAA Paper 2012-1174, 2012.
311. Wild J., Pott-Pollenske M., Nagel B. An integrated design approach for low noise exposing high-lift devices // AIAA Paper 2006-2843, 2006.
312. Nikiforova K., Garbaruk A.V. Numerical simulation of aeroacoustical noise from a wing-flap configuration // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1038, 2018. P. 012135.
313. Lemoine B., Roger M., Legriffon I. Aeroacoustics of a model non-lifting wing-flap system in a parallel flow // AIAA Paper 2011-2735, 2011.
314. Shur M., Strelets M., Travin A. Acoustically adapted versions of STG. Vol 134. // In: *Notes Num. Fluid Mech. and Multidisciplinary Design*. 2018. pp. 62-69.
315. Fujii K. Progress and Future Prospects of CFD in Aerospace: Observations From 30 Years Research // *24th International Congress of the Aeronautical Sciences*. 204.
316. Kwak D., Kiris C.C. Current CFD Practices in Lanch Vehicle Applications // *International workshop on "Future on CFD and Arespace Sciences."* 2012.
317. Schwane R. Numerical prediction and experimental validation of unsteady loads on ARIANE5 and VEGA // *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 52, No. 1, 2015. pp. 54–62.
318. Drikakis D., Kwak D., Kiris C.C. Computational aerodynamics: Advances and challenges // *Aeronautical Journal*, Vol. 12, No. 1223, 2016. pp. 13–36.

319. Любимов А.К., Русанов В.В. Течения газа около тупых тел. В 2 ч. Москва: Наука, 1970. 668 с.
320. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. 2nd ed. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 312 pp.
321. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. Москва: Наука, Изд. фирма "Физ.-мат. лит.", 1996. 374 pp.
322. Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л. Теплообмен и разрушение тел в сверхзвуковом гетерогенном потоке. Москва: ЯНУС-К, 2007. 392 pp.
323. Адамов Н.П., Харитонов А.М., Часовников Е.А., Дядькин А.А., Казаков М.И., Крылов А.Н., Скороваров А.Ю. Аэродинамические характеристики возвращаемых аппаратов при сверхзвуковых скоростях // Теплофизика и Аэромеханика, Т. 22, № 5, 2015. С. 557–565.
324. Суржиков С.Т. Расчет обтекания модели космического аппарата MSRO с использованием кодов NERAT-2D И NERAT-3D // Физико-Химическая Кинетика в Газовой Динамике, Т. 9, № 1-8, 2010.
325. Prasad S.U., Srinivas G. Flow Simulation over Re-Entry Bodies at Supersonic & Hypersonic Speeds // International Journal of Engineering Research and Development, Vol. 2, No. 4, 2012. P. 2278.
326. Бабаков А.В., Белошицкий А.В., Гайдаенко В.И., Дядькин А.А. Численное моделирование и анализ структуры течения около возвращаемого космического аппарата с работающими реактивными двигателями вблизи посадочной поверхности // Космическая техника и технологии, Т. 4, № 11, 2015. С. 1–8.
327. Суржиков С.Т. Аэродинамика возвращаемого космического аппарата Stardust на участке гиперзвукового полета // Вестник МГТУ Им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение, Т. 3, 2016. С. 4-22.
328. Shafeeqe A.P. CFD Analysis on an Atmospheric Re-Entry Module // International Research Journal of Engineering and Technology, Vol. 4, No. 1, 2017. pp. 587–594.
329. Jayaprakash L., Viswabharathy P., Athiram G., Nishanth P. Coupled Analysis of Re-Entry Vehicle // International Journal of Emerging Technologies in Engineering Research, Vol. 5, No. 4, 2017. pp. 175–180.
330. Sinha K., Candler G.V. Grid sensitivity of detached eddy simulation of a Mach 16 re-entry configuration // AIAA Paper 2007-1115, 2007.
331. Yoon S., Gnoffo P.A., White J.A., Thomas J.L. Computational challenges in hypersonic flow simulations // AIAA Paper 2007-4265, 2007.
332. Garbaruk A.V., Niculin D., Strelets M.K., Dyadkin A., Krylov A., Stekenius K. Comparative study of different turbulence modelling approaches to prediction of transonic and supersonic flows past a re-entry capsule with balance flaps // Progress in Flight Physics, Vol. 5, 2013. pp. 3-42., Vol. 5, 2013. pp. 3-22.
333. Sekula M., Piatak D., Rausch R. Analysis of a Transonic Alternating Flow Phenomenon Observed During Ares Wind Tunnel Tests // Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 49, No. 5, 2012. P. 788.
334. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Дядькин А.А., Рыбак С.П. Численное исследование турбулентного течения в следе за соплами ракетного блока аварийного спасения и определение пульсаций давления на поверхности возвращаемого аппарата при различных режимах полета // Тезисы докладов 6-й Всероссийской конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике». Светлогорск. 2016. С. 171–174.
335. Дядькин А.А., Рыбак С.П., Трашков Г.А., Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Дроздов С.М., Столяров Е.П. Расчетно-экспериментальные исследования пульсаций давления на

- поверхности космической головной части с пилотируемым транспортным кораблем на участке выведения // *Космическая техника и технологии*, Т. 24, № 1, 2019. С. 5-22.
336. Аксенов А.А., Дядькин А.А., Рыбак С.П. Численное Моделирование ударно-волновых воздействий на возвращаемый аппарат пилотируемого транспортного корабля при срабатывании системы аварийного спасения // *Космическая техника и технологии*, Т. 4, № 15, 2016. С. 3-15.
337. Архиреева Е.Ю., Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К., Коляда Е.О., Косенко А.П., Кудряшов И.Ю., Липницкий Ю.М., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Панасенко А.В., Северин А.В. Автоколебательные процессы при обтекании тел с изломами образующей. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 100 с.
338. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Дядькин А.А., Рыбак С.П. Расчетные исследования распределения давления и пульсаций давления на пилотируемом транспортном комплексе при отделении ОГБ // *Труды 7 Всероссийской конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике»*. Светлогорск. 2018. С. 75-79.
339. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Дядькин А.А., Рыбак С.П. Расчет нестационарных воздействий на поверхность пилотируемого транспортного корабля при отделении головного блока // *Материалы XXV всероссийского семинара с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*. 2018. С. 65-67.
340. Bachalo W.D., Johnson D.A. Transonic, Turbulent Boundary-Layer Separation Generated on an Axisymmetric Flow Model // *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 3, 1986. pp. 437-443.
341. Беляев К.В., Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Spalart P.R. Опыт прямого численного моделирования турбулентности на суперкомпьютерах // *Труды международной конференции Суперкомпьютерные дни в России 2016*. Москва. 2016. С. 357-364.
342. Belyaev K.V., Garbaruk A.V., Shur M.L., Strelets M.K., Spalart P.R. Experience of direct numerical simulation of turbulence on supercomputers // *Communications in Computer and Information Science*, Vol. 687, 2016. pp. 67-77.
343. Sipp D., Marquet O., Meliga P., Barbagallo A. Dynamics and control of global instabilities in open-flows: A linearized approach // *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 63, No. 3, 2010. pp. 1-26.
344. Theofilis V. Global Linear Instability // *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 43, No. 1, 2011. pp. 319-352.
345. Theofilis V. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows // *Prog Aerosp Sci*, Vol. 39, 2003. pp. 249-315.
346. Hussain A.K.M.F., Reynolds W.C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 41, No. 2, 1970. pp. 241 - 258.
347. Reynolds W.C., Hussain A.K.M.F. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 54, No. 2, 1972. pp. 263-288.
348. Gaster M., Kit E., Wygnanski I. Large-scale structures in a forced turbulent mixing layer // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 150, 1985. pp. 23-39.
349. Reau N., Tumin A. Harmonic perturbations in turbulent wakes // *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 3, 2002.
350. Sen P.K., Veervalli S.V. Hydrodynamic stability theory and wall turbulence // *Current Science*, Vol. 79, No. 6, 2000.

351. Sen P.K., Veervalli S.V. Behaviour of organized disturbances in fully developed turbulent channel flow // *Sadhana*, Vol. 25, No. 5, 2000. pp. 423–437.
352. Rodriguez D., Theofilis V. Massively Parallel Solution of the BiGlobal Eigenvalue Problem Using Dense Linear Algebra // *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 10, 2009. pp. 2449–2459.
353. Timme S., Badcock K.J., Wu M., Spence A. Lyapunov inverse iteration for stability analysis using computational fluid dynamics // *AIAA Paper 2012–1563*, 2012.
354. Xu S., Timme S., Badcock K.J. Krylov subspace recycling for linearised aerodynamic analysis using DLR – TAU code // *IFASD 2015*. 2015.
355. Xu S., Timme S., Badcock K.J. Enabling off-design linearised aerodynamics analysis using Krylov subspace recycling technique // *Computers and Fluids*, Vol. 140, 2016. pp. 385–396.
356. Theofilis V. Linear instability in two spatial dimensions // *Fourth European Computational Fluid Dynamics Conference ECCOMAS '98*. 1998.
357. Ding Y., Kawahara M. Three-dimensional linear stability analysis of incompressible viscous flows using the finite element method // *Int. Journal of Numer. Meth. Fluids*, Vol. 31, 1999. pp. 451–479.
358. Theofilis V. On the spatial structure of global linear instabilities and their experimental identification // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 4, 2000. pp. 249–262.
359. Theofilis V., Hein S., Dallmann U. On the origins of unsteadiness and three-dimensionality in a laminar separation bubble // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2000. pp. 3229–3246.
360. Ehrenstein U., Gallaire F. On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows: the flat-plate boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 536, 2005. pp. 209–218.
361. Akervik E., Ehrenstein U., Gallaire F., Henningson D.S. Global two-dimensional stability measures of the flat plate boundary-layer flow // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Vol. 27, No. 5, 2008. pp. 501–513.
362. Theofilis V., Duck P.W., Owen J. Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 505, 2004. pp. 249–286.
363. Hein S., Theofilis V. On instability characteristics of isolated vortices and models of trailing-vortex systems // *Computers & Fluids*, Vol. 33, No. 5–6, 2004. pp. 741–753.
364. Gonzalez L.M., Gomez-Blanco R., Theofilis V. Eigenmodes of a counter-rotating vortex dipole // *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 11, 2008. pp. 2796–2805.
365. Abdessemed N., Sherwin S.J., Theofilis V. On Unstable 2D Basic States in Low Pressure Turbine Flows at Moderate Reynolds Numbers // *AIAA Paper 2004-2541*, 2004.
366. Abdessemed N., Sherwin S.J., Theofilis V. Linear stability of the flow past a low pressure turbine blade // *AIAA Paper 2006-3530*, 2006.
367. Abdessemed N., Sherwin S.J., Theofilis V. Linear instability analysis of low-pressure turbine flows // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 628, 2009. pp. 57–83.
368. Kitsios V., Rodriguez D., Theofilis V., Ooi A., Soria J. BiGlobal stability analysis in curvilinear coordinates of massively separated lifting bodies // *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 19, 2009. pp. 7181–7196.
369. Zhang W., Samtaney R. BiGlobal linear stability analysis on low-Re flow past an airfoil at high angle of attack // *Physics of Fluids*, Vol. 28, No. 4, 2016. P. 044105.
370. Garbaruk A.V., Crouch J.D. Quasi-three dimensional analysis of global instabilities: onset of vortex shedding behind a wavy cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 677, 2011. pp. 572–588.

371. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Shur M.L., Strelets M.K. Predicting buffet onset from the temporal instability of steady RANS solutions // *APS Meeting Abstracts*. 2002. Vol. 1. P. 100.
372. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Magidov D. Predicting the onset of flow unsteadiness based on stability analysis // *European conference for aerospace sciences (EUCASS)*. 2005.
373. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Magidov D. Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability // *Journal of Computational Physics*, Vol. 224, No. 2, 2007. pp. 924–940.
374. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Magidov D., Jacquin L. Global Structure of Buffeting Flow on Transonic Airfoils // *Solid Mechanics and its Applications*, Vol. 14, 2009. pp. 297–306.
375. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Magidov D., Travin A.K. Origin and structure of transonic buffet on airfoils // *AIAA Paper 2008-4233*, 2008.
376. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Magidov D., Travin A.K. Origin of transonic buffet on aerofoils // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 628, 2009. pp. 357–369.
377. Crouch J.D., Garbaruk A.V., Strelets M.K. Global Instability Analysis of Unswept- and Swept-Wing Transonic Buffet Onset // *AIAA Paper 2018-3229*, 2018.
378. Carini M., Airiau C., Debien A., Leon O., Pralits J.O. Global stability and control of the confined turbulent flow past a thick flat plate // *Physics of Fluids*, Vol. 29, No. 2, 2017. P. 024102.
379. Timme S., Thormann R. Towards Three-Dimensional Global Stability Analysis of Transonic Shock Buffet // *AIAA Paper 2016-3848*, 2016.
380. Timme S. Global Shock Buffet Instability on NASA Common Research Model // *AIAA Paper 2019-0037*, 2019.
381. Berkooz G., Holmes P., Lumley J.L. The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 25, 1993. pp. 539–575.
382. Hall K.C., Thomas J.P., Dowell E.H. Proper Orthogonal Decomposition Technique for Transonic Unsteady Aerodynamic Flows // *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 10, 2000. pp. 1853–1862.
383. Schmidt P.J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 656, 2010. pp. 5–28.
384. Ferrer E., de Vicente J., Valero E. Low cost 3D global instability analysis and flow sensitivity based on dynamic mode decomposition and high-order numerical tools // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 76, No. 3, 2014. pp. 169–184.
385. Kou J., Zhang W. An improved criterion to select dominant modes from dynamic mode decomposition // *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 62, 2017. pp. 109–129.
386. Poplingher L., Raveh D.E. Modal Analysis of Transonic Shock Buffet on 2D Airfoil // *AIAA Paper 2018-2910*, 2018.
387. Poplingher L., Raveh D.E., Dowell E.H. Modal analysis of transonic shock buffet on 2D airfoil // *AIAA Journal*, Vol. 57, No. 7, 2019. pp. 2851–2866.
388. Линь Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. Москва: Издательство Иностранной Литературы, 1958.
389. Голуб Д., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999.
390. Ehrenstein U. On the linear stability of channel flows over riblets // *Phys Fluids*, Vol. 8, 1996. pp. 3194-3196.
391. Lin R.S., Malik M.R. On the stability of attachment-line boundary layers. Part 2. the effect of leading-edge curvature // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 333, 1996. pp. 125–137.

392. Lehoucq R.B., Sorensen D.C., Yang C. ARPACK user's guide, 1998.
393. Hernandez V., Roman J.E., Tomas A., Vidal V. Krylov-Schur Methods in SLEPc, 2007. [Online]. <http://slepc.upv.es/documentation/reports/str7.pdf>
394. Mamou M., Khalid M. Finite element solution of the Orr – Sommerfeld equation using high precision Hermite elements: plane Poiseuille flow // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 44, 2004. pp. 721–735.
395. Taylor J.R., Sarkar S. Stratification Effects in a Bottom Ekman Layer // *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 38, 2008. pp. 2535–2555.
396. Faller A.J. An experimental study of the instability of the laminar Ekman boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 15, No. 4, 1963. pp. 560–576.
397. Barcilon V. Stability of a non-divergent Ekman layer // *Tellus*, Vol. XVII, 1965. pp. 53–67.
398. Faller A.J., Kaylor R.E. A numerical study of the instability of laminar Ekman boundary layer flow // *J. Atmos. Sci.*, Vol. 23, 1966. pp. 466–480.
399. Lilly D.K. On the instability of Ekman boundary flow // *Journal of Atmos. Sci.*, Vol. 23, 1966. pp. 481–494.
400. Mack L.M. The wave pattern produced by a point source on a rotating disk // AIAA Paper 85-0490, 1985.
401. Lingwood R.J. Absolute instability of the Ekman layer and related rotating flows // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 331, 1997. pp. 405–128.
402. Zebib A. Stability of viscous flow past a circular cylinder // *Journal of Eng.Math.*, Vol. 21, 1987. pp. 155–165.
403. Jackson C.P. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies // *Journal of Fluid Mech*, Vol. 182, 1987. pp. 23–45.
404. Strykowski P.J., Sreenivasan K.R. On the formation and suppression of vortex 'shedding' at low Reynolds numbers // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 218, 1990. pp. 71–107.
405. Hammache M., Gharib M. An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders // *Journal of Fluid. Mech.*, Vol. 232, 1991. pp. 567–590.
406. Lee M.J., Kim J. The structure of turbulence in a simulated plane Couette flow // Eighth Symp. on Turbulent Shear Flows Tech. University of Munich. Munich. 1991. pp. 5.3.1-5.3.6.
407. Spalart P.R., Garbaruk, A. V., Strelets, M. Kh. RANS solutions in Couette flow with streamwise vortices // *International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP 8)*. 2013. Vol. 3. pp. 1–6.
408. Spalart P.R., Garbaruk A.V., Strelets M.K. RANS Solutions in Couette flow with streamwise vortices // *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 49, 2014. pp. 128–134.
409. Deusebio E., Brethouwer G., Schlatter P., Lindborg E. A numerical study of the stratified and unstratified Ekman layer // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 755, 2014. pp. 672–704.
410. Spalart P.R., Coleman G.N., Johnstone R. Direct numerical simulation of the Ekman layer: A step in Reynolds number, and cautious support for a log law with a shifted origin // *Physics of Fluids*, Vol. 20, No. 10, 2008.
411. Miyashita K., Iwamoto K., Kawamura H. Direct numerical simulation of the neutrally stratified turbulent Ekman boundary layer // *Journal of the Earth Simulator*, Vol. 6, No. 3-15, 2006.

412. Coleman G.N., Ferziger J.H., Spalart P.R. A numerical study of the turbulent Ekman layer // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 213, 1990. pp. 313–348.
413. Burton T., Sharpe D., Jenkind N., Bossanyi E., Jenkins N., Sharpe D., Bossanyi E. *Wind Energy Handbook*. John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
414. Flynn G.A., Morrison J.F., Mabey D.G. Buffet Alleviation on Swept and Unswept Wings at High Incidence // *Journal of aircraft*, Vol. 38, No. 2, 2001. pp. 368–378.
415. Гарифуллин М.Ф., Скоморохов С.И., Янин В.В. Оценка границ бафтинга крыла // *Труды ЦАГИ*, № 2711, 2012.
416. Брагин Н.Н., Ковалев В.Е., Скоморохов С.И., Слитинская А.Ю. К оценке границы начала бафтинга стреловидного крыла большого удлинения на трансзвуковых скоростях // *Вестник Московского авиационного института*, Т. 25, № 4, 2018. С. 16–27.
417. Бафтинг летательных аппаратов (по материалам открытой иностранной печати за 1968–1985 гг.), ЦАГИ, 1989.
418. Гарифуллин М.Ф. *Бафтинг*. Москва: Физматлит, 2010. 216 с.
419. McDevitt J.B., Okuno A.F. *Static and Dynamic Pressure Measurement on a NACA 0012 Airfoil in the Ames High Reynolds Number Facility*, 1985.
420. Jacquin L., Molton P., Deck S., Maury B., Soulevant D. Experimental study of shock oscillation over a transonic supercritical profile // *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 9, 2009. pp. 1985–1994.
421. Benoit B., Legrain I. Buffeting prediction for transport aircraft applications based on unsteady pressure measurements // *AIAA Paper 87-2356*, 1987.
422. McDevitt J.B., Levy L.L., Deiwert G.S. Transonic flow about a thick circular-arc airfoil // *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 5, 1976. pp. 606–613.
423. McDevitt J. *Supercritical flow about a thick circular-arc airfoil*, NASA TM-78549 1979. 1089 -1171 pp.
424. Drela M.G.M.B. Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils // *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 10, 1987. pp. 1347–1355.
425. Chang P.K. *Control of Flow Separation*. Hemisphere Publishing Corporation, 1979.
426. Lee B.H.K. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos // *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 35, No. 3, 1999. pp. 205–334.
427. Molton P., Dandois J., Lepage A., Brunet V., Bur R. Control of buffet phenomenon on a transonic swept wing // *AIAA Journal*, Vol. 51, 2013. pp. 761–772.
428. Koike S., Ueno M., Nakakita K., Hashimoto A. Unsteady Pressure Measurement of Transonic Buffet on NASA Common Research Model // *AIAA Paper 2016-4044*, 2016.
429. Dandois J. Experimental study of transonic buffet phenomenon on a 3D swept wing // *Phys. Fluids*, Vol. 28, 2016. pp. 1985–1994.
430. Sugioka Y., Koike S., Nakakita K., Numata D., Nonomura T., Asai K. Experimental analysis of transonic buffet on a 3D swept wing using fast-response pressure-sensitive paint // *Exp. Fluids*, Vol. 59, No. 108, 2018. pp. 1–20.
431. Iovnovich M., Raveh D.E. Numerical Study of Shock Buffet on Three-Dimensional Wings // *AIAA Journal*, Vol. 53, No. 2, 2015. pp. 1–15.
432. Ohmichi Y..I.T., Hashimoto A. Numerical Investigation of Transonic Buffet on a Three- Dimensional Wing using Incremental Mode Decomposition // *AIAA Paper 2017-1436*, 2017.

433. Sartor F., Timme S. Delayed detached-eddy simulation on shock buffet on half wing-body configuration // *AIAA Journal*, Vol. 55, 2017. pp. 1230–1240.
434. Giannelis N.F., Vio G.A., Levinski O. A review of recent developments in the understanding of transonic shock buffet // *Prog. Aeronaut. Sci.*, Vol. 92, 2017. pp. 39–84.
435. Paladini E., Beneddine S., Dandois J., Sipp D., Robinet J.C. Transonic buffet in-stability: From two-dimensional airfoils to three-dimensional swept wings // *Physical Review Fluids*, Vol. 4, No. 10, 2019. P. 103906.